

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREY, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 19.

DER GANZEN REIHE 324. BAND.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RONTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT FÜNF FIGURENTAFELN.

29244



LEIPZIG, 1906.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

1877

1877

Inhalt.

Vierte Folge. Band 19.

Erstes Heft.

	Seite
1. E. Warburg. Über die Zersetzung des Kohlendioxyds durch die Spitzenentladung; von T. Noda	1
2. W. Voigt. Bemerkungen zur Theorie der konischen Refraktion	14
3. O. Lehmann. Fließend-kristallinische Trichiten, deren Kraftwirkungen und Bewegungserscheinungen	22
4. L. Janicki. Feinere Zerlegung der Spektrallinien von Quecksilber, Kadmium, Natrium, Zink, Thallium und Wasserstoff. (Hierzu Taf. I.)	36
5. A. Kalähne. Elektrische Schwingungen in ringförmigen Metallröhren. Zweiter Teil	80
6. M. Paetzold. Strahlungsmessungen an Resonatoren im Gebiete kurzer elektrischer Wellen	116
7. A. Wehnelt. Ein elektrisches Ventilrohr	138
8. Thomas P. Black. Über den Widerstand von Spulen für schnelle elektrische Schwingungen	157
9. P. Gruner. Beitrag zu der Theorie der radioaktiven Umwandlung	169
10. Curt Fischer. Methode zur getrennten Untersuchung der Schwingungen gekoppelter Oszillatoren	182
11. Max Toepler. Über Funkenspannungen	191
12. P. Ehrenfest. Bemerkungen zur Abhandlung des Hrn. H. Reissner: „Anwendungen der Statik und Dynamik monozyklischer Systeme auf die Elastizitätstheorie“	210
13. K. E. F. Schmidt. Bemerkungen zu der Notiz des Hrn. B. Walter: Über das Nachleuchten der Luft bei Blitzschlägen	215

Ausgegeben am 18. Januar 1906.

Zweites Heft.

1. Josef Pollak. Potentialmessungen im Quecksilberlichtbogen. (Hierzu Taf. II, Figg. 1 u. 2; Taf. III, Figg. A, B, C.)	217
2. G. van Dijk. Das elektrochemische Äquivalent des Silbers	249

	Seite
3. A. Einstein. Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen	289
4. A. Batschinski. Abhandlungen über Zustandsgleichung; Abh. I: Der orthometrische Zustand	307
5. A. Batschinski. Abhandlungen über Zustandsgleichung; Abh. II: Aufstellung der Gleichung für Isopentan	310
6. Julius Herweg. Beiträge zur Kenntnis der Ionisation durch Röntgen- und Kathodenstrahlen	333
7. A. Einstein. Zur Theorie der Brownschen Bewegung	371
8. H. Diesselhorst. Zu Maxwells Methode der absoluten Messung von Kapazitäten	382
9. Raphael Ed. Liesegang. Eine scheinbar chemische Fern- wirkung	395
10. O. Lehmann. Homöotropie und Zwillingsbildung bei fließend- weichen Kristallen	407
11. A. Winkelmann. Zur Demonstration der Abbeschen Theorie des Mikroskopes	416
12. G. Tammann. Über die Natur der „flüssigen Kristalle“. III.	421
13. J. v. Zawidzki und M. Centnerszwer. Über retrograde Mischung und Entmischung	426
14. Meyer Wildermann. Zur Bestimmung der Gefrierpunkte verdünnter Lösungen (Antwort an die Herren Nernst und Hausrath)	432
15. H. C. Poockington. Bemerkung zur Arbeit W. Voigts: „Theoretisches und Experimentelles zur Aufklärung des optischen Verhaltens aktiver Kristalle“	439
16. R. Malmström. Berichtigung	440

Ausgegeben am 8. Februar 1906.

Drittes Heft.

1. A. Byk. Die Zustandsgleichungen in ihren Beziehungen zur Thermodynamik	441
2. W. Kaufmann. Über die Konstitution des Elektrons. (Hierzu Taf. IV, Figg. 10 u. 11.)	487
3. W. Seitz. Die Wirkung eines unendlich langen Metallzylinders auf Hertz'sche Wellen. II	554
4. Peter Paul Koch. Beobachtungen über Elektrizitätserregung an Kristallen durch nicht homogene und homogene Deformation	567
5. Emil Kohl. Über die Bewegungsgleichungen und die elektro- magnetische Energie der Elektronen	587
6. Ludwig Tesaf. Zur Theorie der relativen Bewegung und des Foucault'schen Pendelversuches	613
7. A. Miethe. Über die Färbung von Edelsteinen durch Radium	633
8. F. Richarz. Der Wert des Verhältnisses der beiden spezifischen Wärmen für ein Gemisch zweier Gase, insbesondere für ozon- haltigen Sauerstoff	639

Inhalt.

VII

Seite

9. E. Warburg. Bemerkung zu der Arbeit des Hrn. Delere über die Wärmeentwicklung bei zyklischer Magnetisierung von Eisenkernen 648
10. P. H. Eykman. Schutzvorrichtung für die Kauffmannsche Luftpumpe 645
11. Raimund Nimführ. Ein neues Verfahren zur photographischen Fixierung der Aufzeichnungen von Stimmgabeln, der Fallkörper von Fallmaschinen, von Meteorographen etc. . . . 647

Ausgegeben am 2. März 1906.

Viertes Heft.

1. Adolf Heydweiller. Energie, Dauer, dämpfende Wirkung und Widerstand von Kondensatorfunken 649
2. Walter Trenkle. Über das magnetische Verhalten von Eisenpulver verschiedener Dichte 692
3. T. Noda. Dämpfung eines Kondensatorkreises mit einem Zusatzkreise; mit einem Nachsatz von P. Drude 715
4. Heinrich Alt. Über die Verdampfungswärme des flüssigen Sauerstoffs und flüssigen Stickstoffs und deren Änderung mit der Temperatur 739
5. Győző Zemplén. Bestimmung des Koeffizienten der inneren Reibung der Gase nach einer neuen experimentellen Methode 783
6. R. Lindemann. Über lichtelektrische Photometrie und über die Natur der lichtelektrisch wirksamen Strahlung des Kohlenbogens 807
7. E. Aschkinass. Resonatoren im Strahlungsfelde eines elektrischen Oszillators. Bemerkungen zu der Arbeit von M. Paetzold über „Strahlungsmessungen an Resonatoren im Gebiete kurzer elektrischer Wellen“. 841
8. Ernst Lecher. Thomsons Effekt in Eisen, Kupfer, Silber und Konstantan 853
9. A. Denizot. Zur Theorie der relativen Bewegung, mit Bezug auf die Bemerkungen der Herren M. P. Rudzki und L. Tesaf 868
10. B. Walter. Über das Spektrum des elektrischen Hochspannungslichtbogens in Luft 874
11. Richard Thöldte. Berichtigung zur Arbeit über „Die Bestimmung der galvanischen Polarisations“. 877
12. A. Kalähne. Berichtigung zur Abhandlung über „elektrische Schwingungen in ringförmigen Metallröhren“. 879
13. Josef Pollak. Nachtrag zur Abhandlung „Potentialmessungen im Queckailberlichtbogen“. 880

Ausgegeben am 27. März 1906.

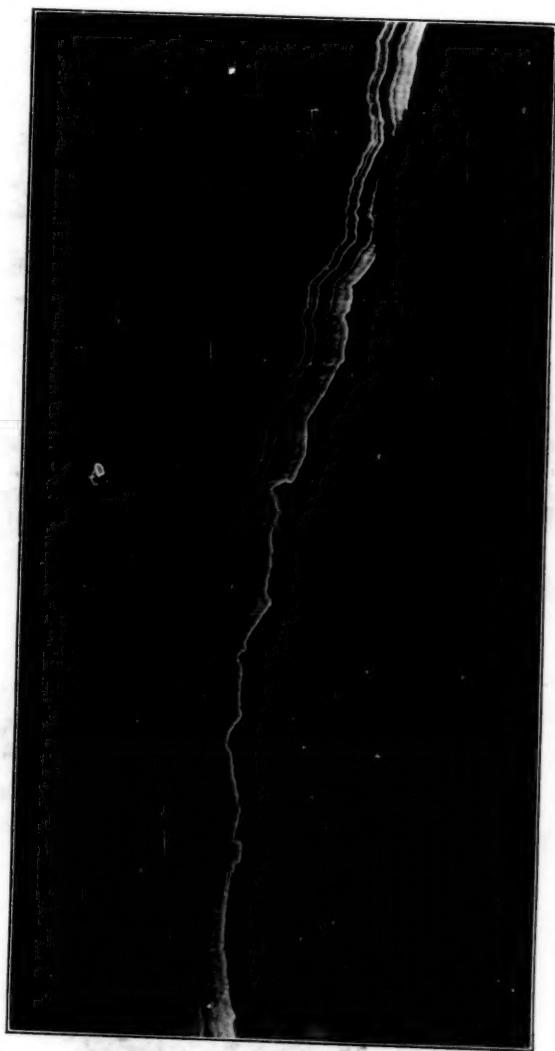
Fünftes Heft.

	Seite
1. G. Jaumann. Elektromagnetische Vorgänge in bewegten Medien	881
2. Th. Schwedoff. Ballistische Theorie der Funkenentladung. Die Schlagweite	918
3. Otto Rohde. Über Oberflächenfestigkeit bei Farbstofflösungen, über lichtelektrische Wirkung bei denselben und bei den Metallsulfiden	935
4. E. Aselmann. Über Elektrizitätsträger, die durch fallende Flüssigkeiten erzeugt werden	960
5. Rudolf Reiger. Über die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes bei zähflüssigen und festen Körpern	985
6. J. Algermissen. Über das statische Funkenpotential bei großen Schlagweiten	1007
7. J. Algermissen. Verhältnis von Schlagweite und Spannung bei schnellen Schwingungen	1016
8. B. Walter. Photographische Aufnahmen von Radiumkörnchen im eigenen Licht. (Vorläufige Mitteilung)	1030
9. B. Walter. Einige weitere Bemerkungen über Blitze und photographische Blitzaufnahmen. (Hierzu Taf. V.)	1032
10. A. Winkelmann. Bemerkungen zu der Abhandlung von O. W. Richardson, J. Nicol und T. Parnell über die Diffusion von Wasserstoff durch heißes Platin	1045
11. R. H. Weber. Die Magnetisierbarkeit der Manganisalze	1056
12. H. Reissner. Anwendungen der Statik und Dynamik monozyklischer Systeme auf die Elastizitätstheorie. Erwiderung auf Hrn. P. Ehrenfests Bemerkung	1071
13. H. F. Wiebe. Über die Beziehung des Schmelzpunktes zum Ausdehnungskoeffizienten der starren Elemente	1076
14. Adolf Schmidt. Werte der erdmagnetischen Elemente zu Potsdam für das Jahr 1905.	1079

Ausgegeben am 10. April 1906.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel	I. Janicki.
„	II, Figg. 1 u. 2; III, Figg. A, B, C. Poliak.
„	IV. Kaufmann, Figg. 10 u. 11.
„	V. Walter.



B. Walter.

1

1

la
R
N
d
v
st
v
d
W
in
ge
a
di

la
sc
un
w
d
na
S
al
m

A.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIerte Folge. Band 19

1. *Über die Zersetzung des Kohlendioxyds durch die Spitzenentladung; von T. Noda; mitgeteilt von E. Warburg.*

§ 1. Die chemische Wirkung der sogenannten stillen Entladung auf gasförmige Körper ist früher hauptsächlich mit Rücksicht auf die entstandenen Produkte studiert worden. Neuerdings¹⁾ hat man für den Fall der Ozonbildung zugleich die Menge der entladenen Elektrizität sowie die Größe der verwandten Arbeit in Betracht gezogen, und insbesondere bestimmt, wie viele Coulomb zur Bildung von 1 Mol Ozon unter verschiedenen Umständen entladen werden müssen, wenn dabei der Ozongehalt so klein gehalten wird, daß die desozonisierende Wirkung des Stromes auf das entstandene Gasgemisch nicht in Betracht kommt. Um diesen Untersuchungen eine allgemeinere Bedeutung zu verleihen, schien es nötig, dieselben auf andere Gase auszudehnen, und Hr. Noda hat das Kohlendioxyd unter dem angegebenen Gesichtspunkte studiert.

§ 2. Die Zersetzung dieses Gases durch die stille Entladung ist von A. Thenard und B. C. Brodie in Siemensschen mit dem Induktionsapparat betriebenen Ozonisatoren untersucht worden. Bei den ersten Versuchen von Thenard²⁾ wurden 4—8 Proz., bei späteren Versuchen³⁾ bis zu 26,5 Proz. des CO_2 zersetzt und zwar, nach Angabe des Autors, sehr nahe nach der Gleichung $2\text{CO}_2 = 2\text{CO} + \text{O}_2$. Der gebildete Sauerstoff ist nämlich nach Thenard zwar merklich ozonisiert, aber so schwach, daß eine quantitative Bestimmung nicht möglich ist. Bei den Versuchen von Brodie⁴⁾ hingegen, bei

1) E. Warburg, Ann. d. Phys. 13. p. 464. 1904; 17. p. 1. 1905; A. W. Gray, Ann. d. Phys. 13. p. 477; 15. p. 606. 1904.

2) A. Thenard, Compt. rend. 74. p. 1280. 1872.

3) L. c. 75. p. 118.

4) B. C. Brodie, Phil. Trans. 164. p. 83. 1874.

welchen 1,5—2,7 Proz. CO_2 zersetzt wurden, zeigte es sich, daß im Mittel ungefähr 50 Proz. des freigemachten Sauerstoffs ozonisiert waren. Wenn man die Zersetzung des CO_2 weiter trieb, so nahm die prozentische Menge des Ozons ab.

Hierbei ist zu berücksichtigen, daß Thenard das aus der Ozonröhre kommende Gas zuerst der Wirkung von Kalilauge unterwarf, um das unzersetzte CO_2 fortzuschaffen und dann den Ozongehalt bestimmte, während Brodie die Ozonbestimmung durch KJ-Lösung vor dem Durchleiten durch die Kalilauge vornahm; Brodie hatte sich nämlich überzeugt, daß Kalilauge eine starke desozonisierende Wirkung ausübt (l. c. p. 98). Die diesbezüglichen Versuche Thenards sind daher nicht beweisend.

§ 3. Bei den Versuchen des Hrn. Noda wurde die Entladung aus metallischen Spitzen angewandt, bei welcher die elektrischen Messungen sich am einfachsten gestalten; ferner die zersetzte Menge nach Andrews und Tait¹⁾ durch die hervorgebrachte Drucksteigerung bestimmt und dabei ein Differentialozonometer²⁾ benutzt. Für die Zersetzung ist nach § 2 die Gleichung

$$(1) \quad \text{CO}_2 = \text{CO} + \frac{1-x}{2} \cdot \text{O}_2 + \frac{1}{2} x \text{O}_3$$

anzunehmen, indem von dem freigemachten Sauerstoff der Bruchteil x ozonisiert ist.

§ 4. Seien n_0 Mol CO_2 ursprünglich vorhanden, davon n_2 zersetzt, n_1 unzersetzt, so daß

$$(2) \quad n_0 = n_1 + n_2.$$

Die Molzahl n nach der Zersetzung ist dann nach (1)

$$n = n_1 + n_2 \left(1 + \frac{1-x}{2} + \frac{1}{2} x \right) = n_1 + n_2 (1,5 - \frac{1}{2} x),$$

oder nach (2)

$$(3) \quad n = n_0 + n_2 (0,5 - \frac{1}{2} x).$$

In dem Differentialozonometer sind das mit CO_2 gefüllte Versuchsgefäß (Volumen V_0) und ein Hilfsgefäß (Volumen V_0') durch eine U-förmige vertikale mit Sperrflüssigkeit vom spezifischen Gewicht σ_1 gefüllte Kapillare verbunden, deren Volumen pro Zentimeter γ sei. Ist der Druck im Versuchsgefäß vor

1) Th. Andrews u. P. G. Tait, Phil. Trans. (1) 150. p. 117. 1860.

2) E. Warburg, Ann. d. Phys. 9. p. 781. 1902.

der Zersetzung p_0 cm Quecksilber bei der Temperatur θ_0 , und ist nach der Zersetzung die Temperatur θ_0 wieder hergestellt, so hat man für die folgenden Versuche hinreichend genau¹⁾

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{n}{n_0} - 1 = b \cdot h, \\ h = \frac{\gamma}{V_0} + \frac{\gamma}{V'_0} + 2 \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma} \cdot \frac{1}{p_0}, \end{cases}$$

indem b die Verschiebung in Zentimetern in *einem* Schenkel der Meßkapillare vorstellt, positiv gerechnet, wenn sie auswärts in bezug auf das Versuchsgefäß erfolgt, σ das spezifische Gewicht des Quecksilbers bedeutet.

Aus (3) und (4):

$$(5) \quad n_2 \left(1 - \frac{x}{3}\right) = 2 b h \cdot n_0 = n_2^0,$$

indem n_2^0 die zersetzte Molzahl bedeutet, welche man unter der Annahme, daß kein Ozon gebildet ist, erhielte ($x=0$), und welche die scheinbare zersetzte Molzahl heißen mag. Zu ihrer Berechnung dienen (4), (5) und die Gleichung

$$(6) \quad n_0 = V_0 \cdot \frac{p}{76} \cdot \frac{1 + \alpha \theta}{1} \cdot \frac{D^0}{M},$$

wo p , θ Druck und Temperatur im Versuchsgefäß nach der Füllung, $D^0=0,001965$ die Dichte des CO_2 unter den Normalverhältnissen, $M=44$ das Molekulargewicht des CO_2 , $\alpha=0,00373$ den Ausdehnungskoeffizienten dieses Gases bedeutet.

n_2 Mol CO_2 geben nun $\frac{1}{3} n_2$ Mol O_2 , wird davon der Bruchteil x ozonisiert, so entstehen $\frac{1}{3} n_2 x = n_3$ Mol Ozon. Mithin ist nach (5)

$$(7) \quad n_2 = n_2^0 + n_3.$$

Die wahre zersetzte Molzahl n_2 wird also gefunden, indem man der scheinbaren n_2^0 die Molzahl gebildeten Ozons hinzufügt, welche man durch Analyse (Titrieren) ermittelt. Findet man dabei m_3 g Ozon, so ist

$$(8) \quad \begin{cases} n_3 = \frac{m_3}{48}, \\ x = 3 \cdot \frac{n_3}{n_2}. \end{cases}$$

1) E. Warburg, l. c.

Endlich ist der zersetzte Bruchteil ε des ursprünglich vorhandenen CO_2

$$(9) \quad \varepsilon = \frac{n_2}{n_0}.$$

§ 5. Fig. 1 zeigt das von Hrn. Noda konstruierte Differentialozonometer. Das Versuchsgefäß V enthält den Spitzen-

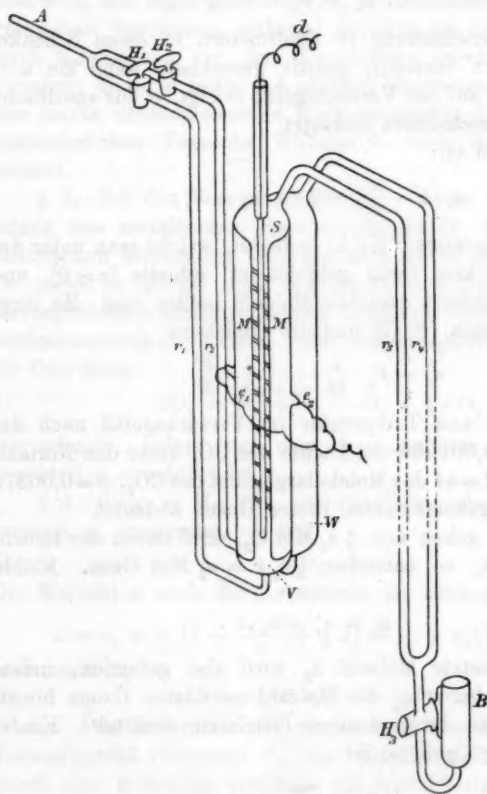


Fig. 1.
 $\frac{1}{8}$ nat. GröÙe.

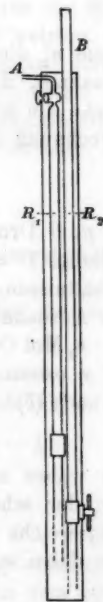


Fig. 2.
 $\frac{1}{12}$ nat. GröÙe.

apparat, nämlich den 3 mm dicken Kupferdraht S , aus welchem beiderseits je 18, 4,5 mm lange Kupferspitzen hervorragen,

und die beiden Halbzylinder M aus Messingblech, welche eine 6 mm breite Spalte zur Durchsicht zwischen sich lassen. Die Entfernung zwischen Spitzenenden und Halbzylindern betrug 6 mm. Eingeschmolzene Platindrähte d , e vermitteln bez. die Verbindung von S mit der durch Elektromotor betriebenen Voss'schen Maschine und die Ableitung der Halbzylinder M über das Drehspulengalvanometer zur Erde. Die Potentialdifferenz der Elektroden wird durch ein Braunsch'sches Elektrometer gemessen. W ist das Hilfsgefäß.

Bei geöffneten Hähnen tritt das CO_2 , im Kippschen Apparat aus Marmor und verdünnter Salzsäure bereitet, durch Schwefelsäure und Chlorcalcium getrocknet¹⁾, bei A ein und bei B aus. Dabei befand sich Paraffinöl in dem Becher B , welches nach dem vierstündigen Durchleiten des Gases erneuert wurde, da es CO_2 absorbiert hatte. Bei geschlossenen Hähnen H_1 und H_2 treibt man durch Blasen durch den geöffneten Hahn H_3 hindurch das Paraffinöl in den Kapillaren r_3 , r_4 bis zur halben Höhe hoch und schließt alsdann H_3 .

Um den Druck im Versuchsapparat zu regulieren und zu messen, konstruierte Hr. Noda die Vorrichtung Fig. 2, bestehend aus den beiden unten durch einen 1,5 m langen Kautschukschlauch verbundenen 1,55 cm lichtweiten Röhren R_1 und R_2 . R_1 kann oben durch einen Hahn verschlossen werden, R_2 ist oben bei B offen. Der Apparat stellt, mit einer passenden Quecksilbermenge gefüllt, ein kleines Gasometer dar. Dasselbe wird mit CO_2 gefüllt und dann mit dem Versuchsapparat verbunden, während bei A aus beiden Apparaten ein CO_2 -Strom austritt. Es ist dann leicht, durch Heben oder Senken von R_2 den Druck im Versuchsapparat auf die gewünschte Höhe zu bringen und alsdann zu messen; dabei werden durch Handhaben der Hähne H_1 und H_2 die Ölsäulen in r_3 und r_4 auf gleiche Höhe gebracht.

Demnächst schließt man die Hähne H_1 und H_2 , gibt ihnen einen dicken Paraffinüberzug und trennt das Gasometer vom Versuchsapparat. Der letztere, nun zum Gebrauch fertig, kommt

1) Die Kautschukverbindungen, innerhalb deren die Glasröhren dicht aneinandergebracht waren, wurden gegen die Atmosphäre durch Lack- und Paraffinüberzug abgedichtet.

in ein mit elektrischem Rührer versehenes Petroleumbad, das durch Eiskühlung außen und elektrische Heizung innen auf jeder Temperatur zwischen 0° und 45° gehalten werden kann. Der elektrische Strom wird, wenn er eine bestimmte Zeit lang gewirkt hat, unterbrochen; man läßt den Apparat die Temperatur des Bades annehmen und nimmt alsdann die Ablesungen in den beiden Schenkeln der Meßkapillare vor. Darauf wird der Strom aufs neue geschlossen und wieder wie beschrieben verfahren.

§ 6. Wenn man am Differentialozonometer denselben Versuch unter denselben Bedingungen wiederholte, so erhielt man im allgemeinen gut übereinstimmende Werte der Verschiebung b für dieselbe Stromdauer. Daher konnte die Ozonmenge für irgend ein Stadium der Zersetzung, d. h. irgend einen Wert der Stromdauer, bestimmt werden, indem man den Gasinhalt des Versuchsgefäßes mittels eines CO_2 -Stromes durch einen mit neutraler KJ-Lösung beschickten Absorptionsapparat hindurchsandte und das freigemachte Jod durch $\frac{1}{500}$ normale Natriumthiosulfatlösung titrierte. 1 ccm der Titrierflüssigkeit entspricht dann 0,048 mg Ozon.

§ 7. Bei allen Versuchen war $\gamma = 0,00357$, $V_0' = 58,7$ ccm (durch Auswägen mit Wasser), $\sigma_1 = 0,876$ bei $18,7^{\circ}$.

Bei der folgenden Versuchsreihe war außerdem $V_0 = 55,25$ ccm (bestimmt mittels des Gasometers Fig. 2 nach der Regnaultschen gasvolumetrischen Methode), ferner

$$\theta = \theta_0 = 15,2^{\circ}, \quad p = p_0 = 73,6,$$

$$\frac{\gamma}{V_0} + \frac{\gamma}{V_0'} = 0,000122, \quad 2 \frac{\sigma_1}{\sigma} \cdot \frac{1}{p_0} = 0,001749,$$

$$h = 0,001871, \quad n_0 \cdot 10^6 = 2261.$$

$$\text{Stromstärke } J = 3,296 \cdot 10^{-5} \text{ Amp.}$$

Die Ergebnisse sind in folgender Tabelle enthalten.

Tabelle I.
Negatives Spitzenpotential.

Zeit t	V	Q (Cb.)	$2b$ (cm)	$m_2 \cdot 10^6$ g	$n_2 \cdot 10^6$
0'	3660	—	—	—	—
50	4370	0,099	3,98	35	0,73
100	4570	0,198	7,96	127	2,65
200	4640	0,396	14,68	244	5,08

Tabelle I (Fortsetzung).

Zeit t 0'	$n_1 \cdot 10^6$	$n_2 \cdot 10^6$	Q/n_2	x	z
50	16,64	17,37	5690	0,13	0,008
100	33,69	36,34	5440	0,22	0,016
200	62,13	67,21	5890	0,23	0,030

Bemerkungen.

1. Die Zersetzung des CO_2 ist bei diesen Versuchen bis 3 Proz. fortgeschritten, also ungefähr ebenso weit wie bei den Versuchen von Brodie; gleichwohl fand im Mittel Brodie 50 Proz., Hr. Noda hingegen nur 19 Proz. des freigemachten Sauerstoffs ozonisiert. Doch wandte Brodie die Entladung in der Siemensschen Röhre, Hr. Noda hingegen die Entladung aus metallischen Spitzen an, und es ist die Ozonisierung des reinen Sauerstoffs weit stärker bei der ersten Entladungsform als bei der zweiten.¹⁾

2. Die Coulombzahl pro Mol zersetzten Kohlendioxyds hat in dem ersten Intervall 0—50' einen größeren Wert als in dem folgenden 0—100'. Diese Anomalie hat sich fast bei allen Versuchen gezeigt, in noch höherem Maße bei positivem Spitzenpotential (vgl. § 8). Berechnet man ferner die Coulombzahl pro Mol für die drei Intervalle 0—50', 50 bis 100, 100—200, so findet man 5690, 5220, 6410 Cb. In dem dritten Intervall ist die Coulombzahl schon erheblich größer als in dem zweiten, was anzeigt, daß jedenfalls in dem dritten Intervall 100—200' schon eine sehr merkliche rückbildende Wirkung des Stromes auf die Zersetzungsprodukte stattfindet.²⁾ Vernachlässigt man diese Wirkung in dem zweiten Intervall 50—100', so ergibt sich, daß 5220 Cb. zur Zersetzung von 1 Mol CO_2 benötigt sind — eine wohl etwas zu kleine Zahl — oder 2610 Cb. pro Grammäquivalent, gegen 96540 Cb. bei der Elektrolyse. Daraus folgt mittels einer früher auf das Ozon angewandten Schlußweise³⁾, daß die Zersetzung des

1) E. Warburg, Ann. d. Phys. 13. p. 474. 1904.

2) Zur Vervollständigung der Untersuchung sollte auch die Wirkung der stillen Entladung auf die Zersetzungsprodukte des CO_2 ($\text{CO} + \frac{1}{2} \text{O}_2$) eventuell unter Berücksichtigung der teilweisen Ozonisierung bestimmt werden.

3) E. Warburg, Ann. d. Phys. 13. p. 474. 1904.

Kohlendioxyds durch die stille Entladung kein elektrolytischer Prozeß ist.

3. Die Potentialdifferenz der Elektroden steigt — wohl besonders durch Bildung von O_2 und O_3 — bei Beginn der Zersetzung schnell, hernach langsam an. Rechnet man rund 4500 Volt, so ist die elektrische Arbeit pro Mol zersetzten CO_2 $5220 \cdot 4500 = 2350 \cdot 10^4$ Joule. Gewonnen wird die Bildungswärme des CO_2 aus CO und $\frac{1}{2} O_2$, d. i. $68000 \cdot 4,19 = 29,5 \cdot 10^4$ Joule pro Mol und die Bildungswärme der 0,08 Mol Ozon, welche pro Mol zersetzten Kohlendioxyds entstehen, d. h. $0,08 \cdot 29600 \cdot 4,19 = 0,9 \cdot 10^4$ Joule, im ganzen also $30,4 \cdot 10^4$ Joule, d. i. nur ungefähr 1,1 Proz. der Stromarbeit. Es ist anzunehmen, daß wie bei der Ozonbildung, so auch bei der Zersetzung des Kohlendioxyds der Herd der chemischen Aktion auf den leuchtenden Teil der Entladung, also hier auf das Glimmlicht an der Spitze beschränkt ist¹⁾; auch von der Stromarbeit im Glimmlicht, welche auf etwa 10 Proz. der ganzen bei den obigen Versuchen zu veranschlagen ist, wird nur ein kleiner Teil, ungefähr 11 Proz., in chemische Energie umgesetzt.

§ 8. Die folgende Tabelle enthält dieselben Versuche mit positivem Spitzenpotential. Es war hier $p = p_0 = 73,8$ cm, $\theta = \theta_0 = 16,6^\circ$, sonst alles wie bisher.

Tabelle II.
Positives Spitzenpotential.

t	V	Q	$2b$	$m_2 \cdot 10^6$	$n_2 \cdot 10^6$
0'	5860	—	—	—	—
40	6410	0,079	1,83	5	0,10
100	6770	0,198	8,17	79	1,65
200	6990	0,396	16,40	213	4,44
t	$n_2^1 \cdot 10^6$	$n_2 \cdot 10^6$	Q/n_2	x	ϵ
0'	—	—	—	—	—
40	7,71	7,81	10100	0,039	0,004
100	34,42	36,07	5490	0,138	0,016
200'	69,09	73,53	5380	1,181	0,033

Anfällig ist der sehr geringe anfängliche Betrag der Zersetzung (vgl. § 7), was sich, wenn auch nicht immer in so

1) E. Warburg, Ann. d. Phys. 13. p. 475. 1904.

hohem Maße, bei allen Versuchen mit positiver Spitze gezeigt hat. Die Coulombzahl pro Mol zersetzten Kohlendioxyds ergibt sich für die Intervalle 40—100', 100—200' bez. zu 4210 und 5290, etwas kleiner als für den Fall negativen Spitzenpotentials (§ 7). Auch der Betrag der Ozonisierung (x) ist etwas kleiner.

§ 9. Es war nun weiter zu prüfen, wie die Coulombzahl pro Mol zersetzten Kohlendioxyds 1. von der Stromstärke abhängt, d. h. also z. B. ob der Strom J in 2 Sek. eine andere Zersetzung hervorbringt als der Strom $2J$ in 1 Sek.; 2. wie jene Zahl von der Dichte und 3. wie sie von der Temperatur beeinflußt wird. Leider reichte die Hrn. Noda zur Verfügung stehende Zeit nicht aus, um die zur vollständigen Berechnung erforderlichen Ozonbestimmungen auszuführen. Es kann daher nur die scheinbar zersetzte Molzahl n_2^0 angegeben werden, d. h. die unter Annahme des Ozongehaltes Null berechnete. Gleichwohl scheinen diese unvollständigen Versuche doch genug zu lehren, um ihre Mitteilung zu rechtfertigen; wir beschränken uns dabei auf den Fall negativen Spitzenpotentials, weil die Versuche in diesem Fall regelmäßiger als bei positivem Spitzenpotential verlaufen. Das Volumen des Versuchsgefäßes V_0 war bei den folgenden Versuchen 52,7 ccm.

§ 10. *Einfluß der Stromstärke.* Es wurden drei Stromstärken angewandt, welche sich wie 1:2:4 verhielten, und die entsprechenden Stromdauern im Verhältnis 4:2:1 genommen, so daß die Coulombzahlen für entsprechende Beobachtungszeiten stets die gleichen waren; alle übrigen Versuchsbedingungen waren in den drei Fällen die gleichen. p^0 ist der auf 0° reduzierte Druck p nach Füllung.

Tabelle III.

t	Q (Cb.)	$2b$	$n_2^0 \cdot 10^6$	Q/n_2^0	s^0	V
1. $p = 73,5$. $\theta = 18^\circ$. $p^0 = 68,9$. $\theta_0 = 18,9^\circ$. $J = 1,648 \cdot 10^{-5}$ Amp.						
0	—	—	—	—	—	3780
100	0,099	3,99	16,0	6190	0,008	4340
200	198	8,28	33,0	6000	015	4460
300	297	12,41	49,7	5980	023	4490
400	396	16,27	65,1	6080	031	4580
500	494	19,74	79,0	6250	037	4670
600	593	23,05	92,8	6420	043	4700

Tabelle III (Fortsetzung).

t	Q (Cb.)	$2b$	$n_2^0 \cdot 10^3$	Q/n_2^0	s^0	V
0	—	—	—	—	—	3660
50	0,099	3,98	16,0	6190	0,008	4630
100	198	8,25	33,0	6000	015	4670
150	297	12,43	49,8	5960	023	4820
200	396	16,18	64,8	6110	030	4900
250	494	19,66	78,7	6300	037	4970
300	593	22,92	91,8	6460	043	5000

2. $p = 73,7$. $\theta = 18,6^\circ$. $p^0 = 68,9$. $\theta_0 = 18,9^\circ$. $J = 3,296 \cdot 10^{-5}$ Amp.

0	—	—	—	—	—	3600
25	0,099	4,02	16,1	6150	0,008	4790
50	198	8,26	33,0	6000	016	4900
75	297	12,36	49,4	6010	023	5000
100	396	16,09	64,3	6160	031	5100
125	494	19,60	78,3	6310	037	5140
150	593	22,86	91,3	6500	043	5200

Aus den vorstehenden Ergebnissen folgt, daß die scheinbare zersetzte Molzahl n_2^0 nur von der entladenelektrizitätsmenge (Coulombzahl), dagegen nicht von der Stromstärke abhängt. Dasselbe wird wenigstens nahezu für die wahre zersetzte Molzahl gelten, da die Ozonisierung des reinen Sauerstoffs bei negativer Spitze von der Stromstärke nur wenig beeinflusst wird.¹⁾

§ 10. *Einfluß der Dichte.* Bei den folgenden Versuchen wurde nur die Dichte des Gases, welche dem auf 0° reduzierten Anfangsdruck p^0 proportional ist, variiert, während die Stromstärke und die Temperatur konstant blieben.

1) E. Warburg, l. c. p. 471.

Tabelle IV.

t	Q (Cb.)	$2b$	$n_2^0 \cdot 10^3$	Q/n_2^0	s^0	V
1. $p = 73,2$. $\theta = 18,4^\circ$. $p^0 = 68,5$. $\theta_0 = 18,9^\circ$. $J = 3,296 \cdot 10^{-5}$ Amp.						
0	—	—	—	—	—	3600
50	0,099	4,14	16,5	6000	0,008	4620
100	198	8,48	33,9	5840	016	4670
150	297	12,70	50,8	5850	024	4820
200	396	16,61	66,5	5960	031	4900
250	494	20,27	81,1	6090	038	4960
300	593	23,65	94,7	6260	045	4990

2. $p = 53,3$. $\theta = 16,3^\circ$. $p^0 = 50,3$. $\theta_0 = 18,9^\circ$. $J = 3,296 \cdot 10^{-5}$ Amp.

0	—	—	—	—	—	3080
50	0,099	3,62	14,2	6970	0,009	3740
100	198	7,52	29,5	6710	018	4050
150	297	11,28	44,3	6700	028	4070
200	396	14,80	58,1	6820	037	4120
250	494	18,00	70,7	6990	045	4180
300	593	20,86	81,9	7240	052	4240

3. $p = 32,9$. $\theta = 14,1^\circ$. $p^0 = 31,3$. $\theta_0 = 19,0^\circ$. $J = 3,296 \cdot 10^{-5}$ Amp.

0	—	—	—	—	—	2540
50	0,099	2,98	11,5	8610	0,012	2780
100	198	6,10	23,5	8430	024	2890
150	297	8,98	34,6	8580	036	2960
200	396	11,80	45,5	8700	047	3020
250	494	14,47	55,8	8850	058	3080
300	593	17,02	65,6	9040	068	3080

Nach diesen Ergebnissen nimmt die scheinbare Coulombzahl pro Mol zersetzten Kohlendioxyds mit abnehmender Dichte zu. In noch höherem Maße kann dies für die wahre Coulombzahl erwartet werden, da die Ozonisierung des reinen Sauerstoffs mit abnehmender Dichte abnimmt¹⁾, also die Differenz $n_2 - n_2^0$ mit abnehmendem Druck voraussichtlich zunehmen würde. Die Zersetzung des Kohlendioxyds verhält sich also in dieser Beziehung wie die Ozonisierung des Sauerstoffs; beide Wirkungen der stillen Entladung nehmen mit abnehmender Dichte ab.

1) E. Warburg, Ann. d. Phys. 17. p. 13. 1905.

§ 12. *Einfluß der Temperatur.* Endlich wurde die Temperatur zwischen $0,8^\circ$ und $42,5^\circ$ variiert, und dabei die übrigen Versuchsbedingungen, insbesondere die Dichte, konstant gehalten.

Tabelle V.

t	Q (Cb.)	$2b$	$n_2^0 \cdot 10^6$	Q/n_2^0	ε^0	V
1. $p = 74,1$. $\theta = 17,1^\circ$. $p^0 = 69,7$. $\theta_0 = 0,8^\circ$. $J = 3,296 \cdot 10^{-5}$ Amp.						
0	—	—	—	—	—	3600
50	0,099	3,31	14,1	7020	0,007	4120
100	198	6,65	28,3	7000	013	4270
150	297	10,28	43,2	6880	020	4480
200	396	13,46	57,3	6910	027	4610
250	494	16,67	71,0	6960	033	4640
300	593	19,59	88,4	7110	039	4640
2. $p = 73,4$. $\theta = 17,4^\circ$. $p^0 = 69,0$. $\theta_0 = 19,3^\circ$. $J = 3,296 \cdot 10^{-5}$ Amp.						
0	—	—	—	—	—	3440
50	0,099	3,75	15,0	6600	0,007	4010
100	198	7,73	30,9	6410	014	4140
150	297	11,53	46,1	6440	022	4340
200	396	15,09	60,4	6560	028	4380
250	494	18,35	73,4	6730	034	4430
300	593	21,49	86,0	6900	040	4490
3. $p = 73,1$. $\theta = 16,6^\circ$. $p^0 = 68,9$. $\theta_0 = 42,5^\circ$. $J = 3,296 \cdot 10^{-5}$ Amp.						
0	—	—	—	—	—	3260
50	0,099	4,36	16,2	6110	0,008	4040
100	198	8,64	32,1	6170	015	4210
150	297	12,88	47,9	6200	022	4340
200	396	17,01	63,3	6260	030	4490
250	494	20,83	77,5	6370	036	4610
300	593	24,58	91,5	6480	043	4670

Nach diesen Versuchen nimmt die scheinbare Coulombzahl pro Mol mit steigender Temperatur ab. Wäre die Ozonisierung hier wie beim reinen Sauerstoff bei konstanter Dichte von der Temperatur unabhängig¹⁾, so würde auch die wahre Coulombzahl pro Mol zersetzten Kohlendioxyds mit

1) E. Warburg, Ann. d. Phys. 17. p. 17. 1905.

steigender Temperatur abnehmen, d. h. die pro Coulomb zersetzte Menge mit steigender Temperatur zunehmen. Doch bedarf jene Annahme der experimentellen Prüfung; wenn die Ozonbildung hier mit steigender Temperatur abnimmt, so könnte der für die scheinbaren Werte gefundene Temperatureinfluß für die wahren Werte verschwinden.

§ 13. Der Spitzenapparat war bei den Versuchen §§ 7—8, Tab. I—II platinirt, dagegen bei den Versuchen §§ 10—12, Tab. III—V nicht platinirt. Doch macht dies jedenfalls keinen großen Unterschied. In der Tat ergeben die Versuche III, 2; IV, 1; V, 2; I, bei welchen im übrigen die gleichen Bedingungen eingehalten waren, folgende Werte für n_2 .

	$t = 50'$	100'	200'	
Tab. III, 2	16	33	64,8	
Tab. IV, 1	16,5	33,9	66,5	
Tab. V, 2	15,0	30,9	60,4	
Mittel	15,8	32,6	63,9	nicht platinirt
dagegen Tab. I	16,6	33,7	62,1	platinirt.

Charlottenburg, im November 1905.

(Eingegangen 28. November 1905.)

2. Bemerkungen zur Theorie der konischen Refraktion; von W. Voigt.

1. Das vollständig unstetige Verhalten der Lichtstrahlen in einem zweiachsigen Kristall, das nach der Fresnelschen Theorie eintritt, wenn eine Wellennormale sich einer optischen Achse nähert, mag schon öfter Bedenken erregt haben; in der Tat dürfte es schwer sein, im ganzen Gebiete der Physik ein Analogon dafür zu finden, und gerade dieser Umstand hat vielleicht bei dem außerordentlichen Aufsehen, welches die Hamilton-Lloydsche Entdeckung der konischen Refraktion seiner Zeit verursachte, mitgewirkt.

Ich habe in einer früheren Arbeit¹⁾ nachgewiesen, daß das beobachtbare Phänomen, das gemeinhin auf das singuläre Verhalten der längs einer optischen Achse fortgepflanzten Welle zurückgeführt wird, in Wahrheit gar nicht auf demselben beruht. Im folgenden möchte ich eine Überlegung mitteilen, die mir wahrscheinlich macht, daß *jenes singuläre Verhalten selbst in Wahrheit auch nicht existiert*. Da dieselbe zur Ableitung der in der vorigen Arbeit darzulegenden Resultate nicht notwendig war, so habe ich sie dort nicht eingefügt, sondern bringe sie lieber hier als Nachtrag.

Ich habe in jener Arbeit darauf hingewiesen, daß die moderne (physikalische) Deutung der Lichtstrahlen durch den Energiefluß nicht notwendig mit der älteren (geometrischen) durch den Radiusvektor der Wellenfläche zusammenfällt. Es läßt sich in der Tat im allgemeinen nur eine *angenäherte* Übereinstimmung der beiderseitigen Aussagen plausibel machen, und selbst diese nur unter Heranziehung hypothetischer Vorstellungen, z. B. der Annahme, daß, wenn mehrere Wellen in demselben Raume fortschreiten, die beiderseitigen Energieflüsse sich in für die Beobachtung merklicher Weise nicht gegenseitig beeinflussen. Eine solche Annahme erweist sich

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 18. p. 645. 1905.

in den Fällen verständlich, wo diejenigen Anteile des Energieflusses, die gleichzeitig auf *beiden* Wellen beruhen und die niemals fehlen, entweder in allen merklichen *Zeiten* oder in allen merklichen *Räumen* verschwindende (zeitliche oder räumliche) *Mittelwerte* ergeben. Aber gerade diese Voraussetzung ist dann nicht erfüllt, wenn es sich um die gleichzeitige Fortpflanzung einer ordinären und einer extraordinären Welle in Richtungen handelt, die einer optischen Achse sehr nahe liegen. Diese Wellen sind der Regel nach *kohärent*, demgemäß ist der *zeitliche* Mittelwert jenes Gliedes der Energieströmung nicht gleich Null; ihre Geschwindigkeitsdifferenz *verschwindet* bei Annäherung an die optische Achse, demgemäß wechselt ihre Phasendifferenz immer langsamer und wird schließlich konstant — sonach ist hier auch die Heranziehung eines *räumlichen* Mittelwertes nicht zulässig. Mir scheint daraus zu folgen, daß man in der unmittelbarsten Umgebung einer optischen Achse den Energiefluß, der den beiden Wellen entspricht, nicht zerlegen kann, sondern *ihn durchaus als Einheit betrachten muß*. Dann gelangt man aber zu Resultaten, die von denen der alten Theorie bemerkenswert abweichen.

2. Ich will hier, wie früher, ein Koordinatensystem benutzen, dessen *Z*-Achse in die Wellennormale, dessen *X*-Achse in die (magnetische) Polarisationsrichtung der ordinären, dessen *Y*-Achse in die Polarisationsrichtung der extraordinären Welle fällt. Sind dann *A*, *B* die Komponenten der schwingenden magnetischen Feldstärke, *U*, *V*, *W* die Komponenten der Energieströmung, so ergibt sich unter Benutzung der auf inaktive Kristalle spezialisierten Formeln (16), (17), (18) der vorigen Arbeit für die unmittelbare Umgebung einer optischen Achse gültig

$$(1) \quad \begin{cases} U = \frac{v}{8\pi} (\Theta_1 - \Theta_3) (B^2 n_o \cos i + A B n_e \sin i) \sin \Phi, \\ V = - \frac{v}{8\pi} (\Theta_1 - \Theta_3) (A^2 n_o \sin i + A B n_e \cos i) \sin \Phi, \\ W = \frac{v}{4\pi} \left(\frac{A^2}{n_o} + \frac{B^2}{n_e} \right). \end{cases}$$

Hierin bezeichnen Θ_1 und Θ_3 die extremen Werte des Quadrates des reziproken Brechungsindex, n_o und n_e die Brechungsindizes für die ordinäre und die extraordinäre zur *XY*-Ebene parallelen

Welle, i den Winkel der ZX -Ebene mit der Ebene der optischen Achsen, die ihrerseits miteinander den Winkel Φ einschließen.

In der unmittelbaren Umgebung einer optischen Achse unterscheiden sich n_o und n_e so wenig voneinander, daß man sie in (1) durch einen mittleren Wert n ersetzen kann. Führt man nun statt des ursprünglichen Koordinatenkreuzes XY ein anderes mit der X_o -Achse parallel, der Y_o -Achse normal zur Ebene der optischen Achsen ein, setzt also

$$(2) \quad \begin{cases} U_o = U \cos i - V \sin i, & V_o = U \sin i + V \cos i, \\ A_o = A \cos i - B \sin i, & B_o = A \sin i + B \cos i, \end{cases}$$

so liefert (1) unmittelbar

$$(3) \quad \begin{cases} U_o = \frac{v n}{8 \pi} (\Theta_1 - \Theta_3) B_o^2 \sin \Phi, \\ V_o = -\frac{v n}{8 \pi} (\Theta_1 - \Theta_3) A_o B_o \sin \Phi, \\ W_o = \frac{v}{4 \pi n} (A_o^2 + B_o^2). \end{cases}$$

In diesen Formeln steckt der Einfluß der Fortpflanzungsrichtung nur in den Abkürzungen A_o und B_o , die nach (2) aus zwei Anteilen mit verschiedenen Phasen bestehen, da sich die ordinäre Schwingung A mit einer anderen Geschwindigkeit fortpflanzt, als die extraordinäre B . Es gilt z. B. in einem Abstand z von der Eintrittsstelle in dem Kristall:

$$(4) \quad A = F \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega_o} - f \right), \quad B = G \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega_e} - g \right);$$

dabei kann man unter Vernachlässigung der Schwächung durch Reflexion beim Eintritt in die Platte die einfallende Welle durch

$$(5) \quad \bar{A} = F \cos \alpha (t - f), \quad \bar{B} = G \cos \alpha (t - g),$$

oder auch durch

$$(6) \quad \bar{A}_o = F_o \cos \alpha (t - f_o), \quad \bar{B}_o = G_o \cos \alpha (t - g_o)$$

dargestellt denken. Rückt die Wellennormale in die optische Achse A_1 , so ändert sich die Energieströmung ersichtlich stetig.

3. Die allgemeine Diskussion dieser Resultate ist offenbar sehr umständlich, doch fällt das Resultat sogleich auf, daß wenn man (3) in

$$(7) \quad U_o = h B_o^2, \quad V_o = -h A_o B_o, \quad W_o = k (A_o^2 + B_o^2)$$

abkürzt, sich die allgemeine Beziehung ergibt

$$(8) \quad U_0 W_0 = \frac{k}{h} (U_0^2 + V_0^2).$$

Wie also auch immer das Gesetz der einfallenden Schwingungen sei, und wie demgemäß die Richtung der Energieströmung oszilliere, stets bleibt die letztere für jede Stelle der fortgepflanzten Welle auf einem schiefen Kreiskegel von der Gleichung (8), der durch die Ebene der optischen Achsen halbiert wird, eine Kante in einer optischen Achse hat, während die zweite, in der Ebene der optischen Achsen liegende Kante mit jener den Winkel χ einschließt, gegeben durch

$$(9) \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{h}{k} = \frac{1}{2} n^2 (\Theta_1 - \Theta_2) \sin \Phi.$$

Zeichnen wir hier und im folgenden auf einer Ebene, die normal zur optischen Achse A_1 im Abstand Eins von der betrachteten Stelle liegt, die Spur der durch jene Stelle gehenden Energieströmung, so ergibt sich ein Kreis vom Durchmesser $D = h/k$, der die Y_0 -Achse im Koordinatenanfang berührt (Fig. 1). Wir wollen diesen Kreis weiterhin kurz als den *Grundkreis* bezeichnen. Sein Zentrum C_1 ist sehr nahezu die Spur der zu A_1 gehörigen Strahlenachse.

Die Amplituden F_0 und G_0 der einfallenden Schwingungen mögen weiterhin der Einfachheit halber in einem solchen Maßstab gezeichnet werden, daß ihre Resultante durch eine Sehne des Grundkreises von der Stelle A_1 aus dargestellt wird (vgl. Fig. 1).

Der durch (8) gegebene Kegel ist identisch mit dem Kegel der theoretischen inneren konischen Refraktion; sein Auftreten drückt aber keineswegs etwa aus, daß die Energieströmung sich in diesem Kegel ausbreitet. Vielmehr verläuft der Energiefluß, da A_0 und B_0 mit t und z periodisch wechseln, in einer *Schraubenlinie*, die selber derartig rotiert, daß das jedem z

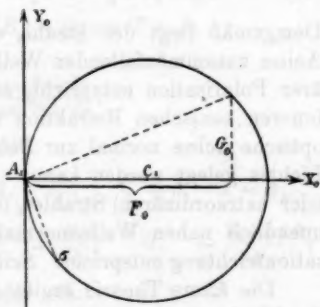


Fig. 1.

entsprechende Linienelement derselben seiner Richtung nach auf einem solchen Kegel verharret.

4. Für die Richtung der optischen Achse selbst, wo $\omega_o = \omega_e = \omega$, können wir schreiben

$$(10) \quad A_o = F_o \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} - f_o \right), \quad B_o = G_o \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} - g_o \right),$$

also

$$(11) \quad \begin{cases} U_o = h G_o^2 \cos^2 \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} - g_o \right), \\ V_o = -h^2 F_o G_o \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} - f_o \right) \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} - g_o \right), \\ W_o = h \left[F_o^2 \cos^2 \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} - f_o \right) + G_o^2 \cos^2 \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} - g_o \right) \right]. \end{cases}$$

Der einfachste Fall, auf den diese Formeln angewendet werden können, ist der *einfallenden lineärpolarisierten Lichtes*, gegeben durch $f_o = g_o$. Hier ist die Richtung der Energieströmung zeitlich und räumlich konstant, denn es gilt

$$(12) \quad U_o : V_o : W_o = h G_o^2 : -h G_o F_o : h (F_o^2 + G_o^2).$$

Demgemäß liegt der Strahl, welcher einer mit der optischen Achse zusammenfallenden Wellennormale bei einfallender linearer Polarisation entspricht, auf dem Kegel der theoretischen inneren konischen Refraktion in der Ebene, welche durch die optische Achse normal zur Polarisationssebene des einfallenden Lichtes gelegt werden kann. Dies ist der Ort des (ordinären oder extraordinären) Strahles, der einer der optischen Achse A_1 unendlich nahen Wellennormale mit der betreffenden Polarisationsrichtung entspricht. Seine Spur in Fig. 1 ist der Punkt σ .

Die ältere Theorie ergibt in dem betrachteten Falle einen Strahlenkegel mit einer maximalen Intensität an der Stelle σ , einer minimalen in dem diametral gegenüberliegenden Punkte.

Fällt linear schwingendes Licht mit regellos wechselnder Polarisationssebene ein, so wird der Punkt σ auch regellos über den Kreis in der Figur hingeleiten, und es muß hierdurch eine Art konischer Refraktion entstehen.

5. Ein zweiter einfacher Fall ist der einfallenden *zirkularpolarisierten Lichtes*, wo man

$$(13) \quad A_o = F_o \sin \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} \right), \quad B_o = \pm F_o \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} \right)$$

setzen kann. Hier gilt dann, wenn $\alpha(t - z/\omega)$ in T abgekürzt wird, nach (7)

$$(14) \quad U_0 = h F_0^2 \cos^2 T, \quad V_0 = \mp h F_0^2 \sin T \cos T, \quad W_0 = 2 k F_0^2.$$

Man erkennt leicht, daß hier die Spur der Energieströmung den Kreis um C_1 in gleicher Geschwindigkeit durchläuft und zwar im + oder - Sinne, je nachdem in (13) das + oder - Zeichen gilt. Die Strömung verläuft somit in einer Schraubenlinie um die C_1 -Richtung als Achse; ein Schraubenumgang hat die Höhe einer Wellenlänge. Der betreffende wahrnehmbare Strahl würde demgemäß merklich mit der Richtung der Strahlenachse C_1 zusammenfallen.

Nach der älteren Theorie würde zirkularpolarisiertes Licht den Strahlenkegel mit überall merklich derselben Intensität liefern.

6. Der allgemeinere Fall einfallenden *elliptisch polarisierten* Lichtes bietet den Übergang zwischen den beiden zuvor besprochenen.

Hier setzen wir

$$(15) \quad A_0 = F_0 \cos(T - \delta), \quad B_0 = G_0 \cos(T + \delta)$$

und erhalten

$$(16) \quad \frac{V_0}{U_0} = - \frac{F_0 \cos(T - \delta)}{G_0 \cos(T + \delta)},$$

woraus sich für $0 < \delta < \pi/2$ ergibt:

$$\text{für } T = 0, \quad \delta, \quad \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} + \delta, \quad \pi = \delta,$$

$$\frac{V_0}{U_0} = - \frac{F_0}{G_0}, \quad - \frac{F_0}{G_0 \cos 2\delta}, \quad \mp \infty, \quad + \frac{F_0}{G_0}, \quad 0, \quad - \frac{F_0 \cos 2\delta}{G_0};$$

mit $T = \pi$ setzt der Anfang wieder ein.

In der nachstehenden Fig. 2 sind die diesen sechs Argumenten T für $\delta = \frac{1}{2}\pi$ entsprechenden Richtungen der Komponente $J = \sqrt{U_0^2 + V_0^2}$ parallel zur Wellenebene eingetragen. Die den sechs Richtungen zugehörigen Argumentalwerte schreiten um $\frac{1}{2}\pi$ fort, die korrespondierenden Zeitintervalle bei konstantem z sind also *gleich*. Man erkennt, daß bei einfallendem elliptisch polarisierten Licht die Rotation der Spur der Energieströmung auf dem Grundkreis mit *ungleichförmiger* Geschwindigkeit stattfindet; die kleinste Geschwindigkeit liegt nahe bei der Stelle 2, die größte bei 5.

Die Energieströmung wird sonach in einer Schraubenlinie mit periodisch wechselnder Steigung stattfinden, und die wahrnehmbare *mittlere* Richtung des Strahles wird von der Richtung C_1 nach der Seite des Punktes 2 hin abweichen.

7. Die arithmetischen Mittelwerte \bar{U}_0 , \bar{V}_0 und \bar{W}_0 der Energieströmungen sind durch

$$(17) \quad \begin{cases} \bar{U}_0 = \frac{1}{2} h G_0^2, & \bar{V}_0 = -\frac{1}{2} h F_0 G_0 \cos \alpha (f_0 - g_0), \\ & \bar{W}_0 = \frac{1}{2} k (F_0^2 + G_0^2) \end{cases}$$

gegeben; man wird annehmen dürfen, daß sie der Richtung der wahrnehmbaren Strahlung entsprechen. $\alpha(f_0 - g_0)$ steht dabei

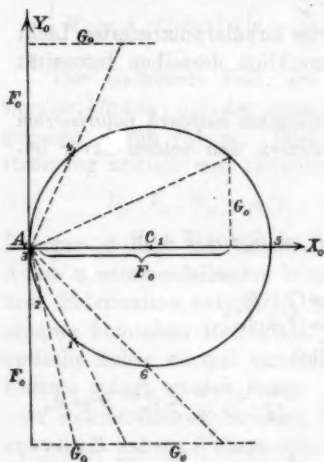


Fig. 2.

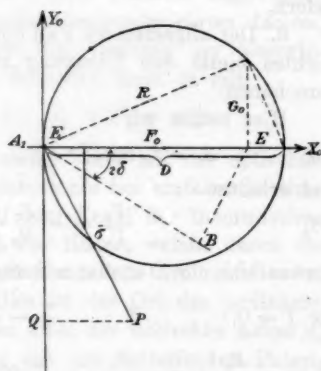


Fig. 3.

an Stelle von 2δ oben. Die Spur dieser Richtung in der Figur läßt sich leicht konstruieren.

Einmal ergibt sich (vgl. Fig. 3), wenn man $\overline{A_1 Q} = \overline{A_1 B} = F_0 \cos 2\delta$ und $\overline{Q P} = G_0$ macht,

$$\frac{\bar{V}_0}{\bar{U}_0} = -\frac{F_0 \cos 2\delta}{G_0} = -\frac{\overline{A_1 Q}}{\overline{Q P}},$$

die Spur muß sonach auf der Geraden $\overline{A_1 P}$ liegen. Ferner ist (vgl. Figur)

$$\frac{\bar{U}_0}{\bar{W}_0} = \frac{\frac{1}{2} h G_0^2}{\frac{1}{2} k (F_0^2 + G_0^2)} = \frac{h}{k} \frac{G_0^2}{F_0^2 + G_0^2}.$$

Nun hat der Grundkreis nach (3) den Durchmesser $D = h/k$, ferner ist $D:R = R:F_0$, also wird

$$\bar{U}_0/\bar{W}_0 = G_0^2/F_0,$$

und da (vgl. Fig. 3) noch $E:G_0 = G_0:F_0$, so folgt schließlich

$$\bar{U}_0/\bar{W}_0 = E;$$

man hat somit nur E von A_1 auf der $+X_0$ -Achse abzutragen und im Endpunkt ein Lot auf der X_0 -Achse zu errichten; dessen Schnittpunkt mit der Geraden $A_1\bar{P}$ gibt die gesuchte Spur σ der mittleren Energieströmung.

Diese Konstruktion läßt die Einwirkung von Amplitudenverhältnis (F_0/G_0) und Verzögerung (2δ) auf die Richtung des Strahles, der einer in die optische Achse A_1 fallenden Wellennormale entspricht, sehr deutlich erkennen.

Fällt natürliches Licht ein, das man als schnell und regellos wechselndes, elliptisch polarisiertes auffassen kann, so ändert der Strahl derart regellos seine Richtung, daß seine Spur innerhalb des Grundkreises alle möglichen Lagen annimmt.

Da sich in einer geometrischen Richtung nur verschwindende Energiemengen fortpflanzen können, so haben die vorstehenden Betrachtungen ebensowenig *praktische* Bedeutung, wie das Hamiltonsche Resultat des Strahlenkegels. Immerhin scheint der Nachweis nicht unwichtig, daß die Resultate der älteren und der neueren Theorie der Strahlen in dem betrachteten speziellen Falle sehr verschieden sind, und daß die neuere Theorie jene anstößige Unstetigkeit nicht liefert, auf welche die ältere führt. Es bleibt freilich auch bei ihr noch ein unklarer Punkt: die Art des Überganges von der einheitlichen Energieströmung zu den zwei wahrnehmbar getrennten Strahlen. Die Untersuchung dieser Frage bleibt vorbehalten.

Für die Theorie der wahrnehmbaren inneren konischen Refraktion, wie ich sie früher entwickelt habe, ist es natürlich irrelevant, ob das Verhalten der Strahlen, welche Wellennormalen in der Umgebung der optischen Achse entsprechen, sich *unendlich* schnell, oder aber mit *außerordentlich großer endlicher* Geschwindigkeit ändert.

(Eingegangen 30. November 1905.)

3. *Fließend-kristallinische Trichiten, deren Kraftwirkungen und Bewegungserscheinungen; von O. Lehmann.*

Trichiten sind anormal geformte, haarförmig dünne und lange, anormal schnell wachsende Kristalle, welche neben normalen Kristallen, gewöhnlich von einzelnen Stellen derselben ausgehend, sich bilden und häufig unter plötzlicher Verdickung (zuweilen nur von einzelnen Stellen) zu normalen Kristallen auswachsen.¹⁾ Ursache ihrer Bildung ist vermutlich eine störende nicht isomorphe Beimischung.

Bei fließenden Kristallen, d. h. solchen, bei welchen die Oberflächenspannung die Elastizität übertrifft, derart, daß zwei in Berührung gebrachte Kristallindividuen zu einem zusammenfließen, wie zwei Flüssigkeitstropfen, waren bisher Trichiten nicht bekannt. Vor kurzem gelang es mir aber Gebilde, welche wohl als solche gedeutet werden können, aufzufinden, bei einem von Hrn. Prof. Vorländer in Halle a. S. in Gemeinschaft mit Hrn. C. Siebert beim Suchen nach neuen Stoffen mit fließend-kristallinischen Modifikationen auf Grund chemischer Analogien entdeckten Präparat²⁾, welches er so freundlich war mir zur näheren Untersuchung zuzusenden. Die Substanz, der Paraazoxyzimtsäureäthylester, ist fließend-kristallinisch zwischen den Temperaturen 139,5—248° (rund) und gleicht in

1) Vgl. hierüber O. Lehmann, *Molekularphysik*, Leipzig, W. Engelmann, 1888. Bd. I. p. 354 u. ff. und O. L., *Flüssige Kristalle*, ibid. 1904. p. 122 u. ff.

2) Hr. Prof. Vorländer schreibt mir bezüglich dieses Präparates: „p-Azoxyzimtsäureester und p-Azoxybenzalacetophenon gehören zu einer neuen Gruppe, von welcher fast sämtliche Vertreter anisotrope Flüssigkeiten liefern. Ich habe etwa zehn solcher Substanzen dargestellt. Azoxyzimtsäureester, besonders Äthyl- und Propylester sind während eines Intervalls von mehr als 100° im fließend-kristallinischen Zustande; leider sind sie bei höherer Temperatur etwas zersetzlich.“

ihrem Verhalten unter dem Mikroskop ganz dem Paraazoxybenzoesäureäthylester¹⁾, falls sie rein oder mit nur sehr wenig Lösungsmittel versetzt ist. Ihre Doppelbrechung²⁾ ist aber nahe doppelt so groß.

A. Beschreibung der Kristalle.

Die Form der fließenden Kristalle ist ein kurzes, manchmal fast würfelförmiges, wahrscheinlich tetragonales Prisma mit Basis. Die Kanten und Flächen sind etwas gerundet, die Ausbildung ist hemimorph, denn zuweilen ist das eine Ende durch undeutliche Pyramidenflächen zugespitzt. Als Lösungsmittel eignen sich sehr viele Flüssigkeiten oder geschmolzene feste Körper; gewöhnlich benutzte ich Mandelöl, Xylol, Terpentinöl und besonders häufig Monobromnaphtalin oder Petroleum. Letztere haben den Vorzug leichtflüssig zu sein und doch nur langsam zu verdunsten. Die Prismen erscheinen gelb und mit scharfen Umrissen, wenn die kurze Diagonale des Polarisators der Längsrichtung parallel ist, blaß und weiß (farblos), wenn sie senkrecht dazu steht. Der Dichroismus ist sehr auffallend und kann durch Farbstoffaufnahme künstlich erhöht werden. Er trat auch bei den sehr kleinen Kriställchen, welche gewöhnlich beobachtet wurden, unter Anwendung von 300—500 facher Vergrößerung deutlich hervor.

Die höchst merkwürdige, durch keine der bekannten Kraftwirkungen leicht erkläre Erscheinung, welche Gegenstand dieser Besprechung sein soll, zeigt sich nur dann, wenn man relativ reichlich Lösungsmittel verwendet, welches, wie aus der verminderten Zähigkeit hervorgeht, von den bei niedrigerer Temperatur zur Ausscheidung gelangenden fließenden Kristallen in geringem Maße aufgenommen wird. Auch hier wäre also die Trichitenbildung durch Aufnahme eines fremden Stoffs verursacht. Von Vorteil ist, wenn man noch andere Stoffe zusetzt, die sich in geringem Maße mit der fließend-kristallinen Substanz mischen können wie Paratoluylsäure, Azoxy-

1) Vgl. O. Lehmann, Ann. d. Phys. 12. p. 323. 1903 und Flüssige Kristalle Taf. 3, 4, 5.

2) Vgl. O. Lehmann, Ann. d. Phys. 18. p. 806. 1905.

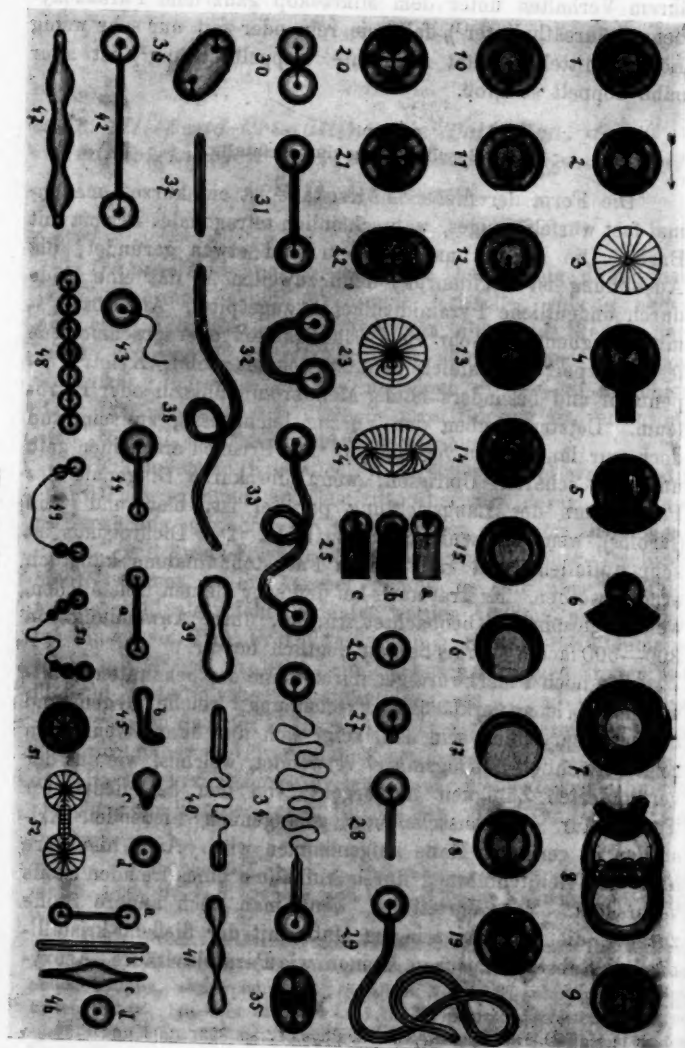


Fig. 1-52.

phenetol¹⁾ oder Anisaldazin, weil dadurch die Dimensionen der Gebilde etwas wachsen, so daß diese deutlicher wahrgenommen werden, während gleichzeitig die Schnelligkeit der später zu besprechenden Bewegungen abnimmt, wodurch es möglich wird, sie durch alle Phasen genau zu verfolgen.

Während, wie bemerkt, die normalen Kristalle kurze rechtwinklige Prismen sind, entstehen unter diesen Umständen, augenscheinlich weil die infolge der Aufnahme von Lösungsmittel mit sinkender Temperatur abnehmende Elastizität nicht mehr imstande ist, der unter gleichen Umständen wachsenden kontraktiven Kraft der Oberflächenspannung zu widerstehen, kugelige Gebilde, welche in der *ersten Hauptlage*, d. h. wenn die Symmetrieachse senkrecht zum Gesichtsfeld steht (in die Sehrichtung fällt) fast genau so aussehen wie die Kristalltropfen von p-Azoxyanisol (Fig. 1). Ein Unterschied tritt namentlich im polarisierten Licht hervor, insofern die weißen und gelben Quadranten nicht schräg liegen, sondern die Richtung der letzteren, wie Fig. 2 andeutet (sie sind hier punktiert), mit der (durch den Pfeil bezeichneten) Richtung der kurzen Nicol-diagonale übereinstimmt. Zwischen gekreuzten Nicols tritt ein schwarzes Kreuz auf wie bei Sphärökristallen und gewöhnlichen Kristalltropfen.

Hiernach könnte man sich also die Gebilde als Aggregate radial angeordneter Prismen vorstellen gemäß Fig. 3. In der Tat wächst zuweilen an einer Stelle ein Prisma heraus (Fig. 4), welches gelb oder farblos erscheint, je nach der Lage zur Nicoldiagonale in Übereinstimmung mit dem Verhalten der Strahlen, deren Verlängerung es bildet; die Übereinstimmung

1) Das p-Azoxyphenetol nimmt auch umgekehrt p-Azoxymethyläthylester auf, wie aus der verminderten Doppelbrechung und dem Auftreten von Pseudoisotropie (vgl. Flüssige Kristalle p. 80) zu schließen ist. Man kann große Tropfen erhalten, die (zwischen gekreuzten Nicols) fast bis auf den Rand nahezu dunkel bleiben, aber (infolge der Homöotropie) sofort sich aufhellen, sobald man (etwa durch Drücken mit einer Präpariernadel auf das Deckglas) eine Deformation hervorruft. Sehr auffällig ist ferner, daß die *schwarzen Kreuze* der Tropfen sich im allgemeinen *spiraltig krümmen* (vgl. Flüssige Kristalle Taf. 24, Fig. 2 und 3). Die früher gegebene Erklärung dieser Spiralform dürfte also unzutreffend sein, d. h. der Grund nicht auf spiraltiger Verdrehung der Struktur, sondern auf Einlagerung eines fremden Stoffes beruhen.

ist indes wahrscheinlich nur eine scheinbare, da es sich in Wirklichkeit um eine Zwillingsbildung handelt. Daß ein solches nicht kugelförmiges zusammengesetztes Gebilde stabil ist, beweist, daß die Oberflächenspannung gerade eben nicht mehr imstande ist die Elastizität zu überwinden. Erstreckt sich der Auswuchs auf eine größere Fläche, so sind entsprechend der radialen Struktur die Kanten nicht parallel, wie die Figg. 5 u. 6 zeigen.

Ist ein Tropfen, wie ich die runden Gebilde kurz nennen will (obschon sie, wie die Möglichkeit polygonaler Formen beweist, noch eine Spur Elastizität besitzen müssen), zwischen Objektträger und Deckglas eingeklemmt, so tritt an Stelle des dunklen Fleckes in der Mitte eine mehr oder minder große helle Stelle (Fig. 7). Beim Zusammenfließen zweier solcher ausgedehnter Tropfen bildet sich an der Grenze eine eigenartige Struktur, in gewöhnlichem Licht als eine Kette wie Fig. 8¹⁾ erscheinend, zwischen gekreuzten Nicols als eine Aneinanderreihung von schwarzen Kreuzen. Die nähere Untersuchung ergab, daß es sich um Aneinanderreihung von *Kegeln* handelt, welche abwechselnd ihre Spitze an der oberen und unteren, die Basis an der entgegengesetzten Fläche haben und in welchen die optischen Achsen die von der Spitze nach der Basis gehenden Strahlen sind. Ist die Struktur genügend fein, so erscheinen leuchtende Streifen ohne schwarze Kreuze auf dunklem Grunde (da in den zentralen Partien die optischen Achsen der Prismen senkrecht stehen). Dreht man das Präparat, so daß eine Stelle eines solchen hellen Streifens einer der Nicol-Schwingungsrichtungen parallel wird, so wird diese in ihrer ganzen Ausdehnung dunkel. Das Verhalten, sowie das Aussehen entspricht in allen Punkten den früher beschriebenen²⁾ „ölgigen Streifen“ bei anderen Präparaten. Die Einzelheiten der Struktur gleichen den bei Zwillingen von p-Azoxymyristinsäureäthylester auftretenden.³⁾

Beim Erwärmen größerer zusammenhängender Massen kann man Schlierenbildungen erhalten wie im analogen Fall

1) Die schwarze Einbuchtung links ist eine Luftblase.

2) Vgl. Flüssige Kristalle p. 48.

3) l. c. p. 89.

bei flüssigen Kristallen, welche die Grenzen der einzelnen Individuen des Aggregates erkennen lassen.¹⁾

Völlig abweichend von dem der Tropfen flüssiger Kristalle ist der Anblick der kugelförmigen Gebilde in der zweiten Hauptlage²⁾, d. h. wenn die Symmetrieachse parallel zum Gesichtsfeld ist (Fig. 9). Wie man sieht, unterscheidet sie sich von der in erster Hauptlage nur dadurch, daß ein gerader Strich von der Mitte bis zum Rand geht. In der Regel tritt an dessen Ende eine Abplattung oder trichterförmige Vertiefung auf wie bei Fig. 10, auch kann sich ein Querstrich hinzugesellen, welcher als freischwebender Ring erscheint, wie in Fig. 12, wenn der Tropfen etwas gedreht ist. Die Lage des Ringes kann auch zentral sein (Fig. 13). Bei weiterer Drehung des Tropfens verkürzt sich der Strich zum zentralen Punkt in der ersten Hauptlage und der Ring erscheint als ein denselben umgebender Kreis (Fig. 14). Bei ausgedehnteren und dickeren Tropfen ist scheinbar ein nicht ganz geschlossener Wulst auf eine Scheibe aufgesetzt (Figg. 15—17).

Im allgemeinen zeigen Tropfen in zweiter Hauptlage ein Bestreben, entgegengesetzt wie der Uhrzeiger zu rotieren, wenn durch gleichzeitiges Heizen von unten und Kühlung von oben eine Temperaturdifferenz hergestellt wird, doch kann die Rotationsrichtung auch umgekehrt sein oder wechseln.

Der Umstand, daß in der Regel da, wo der Strich am Umfang des Tropfens endigt, eine Abplattung oder Einsenkung auftritt, beweist, daß die Form nicht einfach durch die Oberflächenspannung, sondern zugleich durch Elastizität bedingt ist; daß also die Gebilde nicht als flüssige Kristalle bezeichnet werden können, sondern den fließenden festen Kristallen beizuzählen sind, obschon sich ihre Konsistenz nicht von der einer etwas zähen öligen Flüssigkeit unterscheidet.³⁾

1) Vgl. I. c. Taf. 18.

2) Vgl. I. c. p. 64, Figg. 106—112.

3) Bei den flüssigen Kristallen des p-Azoxyanisols und anderer Stoffe habe ich aus der vollkommen runden Form der Tropfen auf Abwesenheit der Elastizität geschlossen. Ein anderes Mittel der Prüfung ist die Bildung einer vollkommen ebenen Oberfläche nicht nur an der Grenze gegen Luft, sondern auch gegen eine andere Flüssigkeit, gegen welche die Oberflächenspannung geringer ist als gegen erstere. Selbstverständlich müssen dabei

Bei Präparaten, welche durch Zusatz von p-Azoxyphenetol verunreinigt waren, wurden Formen erhalten, welche erkennen ließen, daß die Abplattung der Basis einer hemimorph ausgebildeten Pyramide entspricht, deren Spitze zur Kugel zusammengedrückt ist.

Im polarisierten Licht erscheinen die Tropfen in zweiter Hauptlage, wie Fig. 18 und 19 zeigen (Punktierung bedeutet Gelb); zwischen gekreuzten Nicols wie Figg. 20 und 21. Bei Fig. 20 ist der Strich einer der Nicoldiagonalen parallel; von dem schwarzen Kreuz fehlt der gleichgerichtete Arm oder ist nur schwach sichtbar. Wird der Tropfen um 45° gedreht, wie bei Fig. 21, so ist das schwarze Kreuz vollständig.

Unter Umständen erscheint das Gebilde gewissermaßen als Kombination zweier einseitig zusammenhängender Tropfen in erster Hauptlage. Ein solches zeigt Fig. 22 (in polarisiertem Licht). Die beiden Kernpunkte sind durch einen Strich verbunden, der dem oben erwähnten Ring entspricht.

Eine Deutung für alle diese Erscheinungen ergibt sich, wenn man sich die Struktur der Tropfen so denkt, wie die Figg. 23 und 24 zeigen, wobei die Linien wieder die Richtung der optischen Achse an jeder Stelle angeben oder die Art, wie man sich den Tropfen als Aggregat einfacher Prismen vorstellen kann.

Die Polarisationserscheinungen sind an der Stelle des radialen Striches verwickelt, weil die Anordnung von Figg. 23 und 24 natürlich nur für eine mittlere Molekülschicht gilt. Die Moleküle der untersten und obersten Schicht werden annähernd radial verlaufen, so daß sich Drehung der Polarisations-ebene ergeben muß, wie bei verdreht übereinandergeschichteten Glimmerblättchen. Durch Drehen des Analysators kann man in der Tat zuweilen eine Verstärkung der Dunkelheit erzielen,

alle Temperaturdifferenzen ausgeschlossen werden, welche Strömungen durch Änderung der Dichte und der Oberflächenspannung hervorbringen können. Die Leichtflüssigkeit, welche nach Schenck etwa der des Alkohols gleichkommt, d. h. der geringe Grad der inneren Reibung spricht ebenfalls für die Flüssigkeitsnatur jener Tropfen, also dafür, daß die Grenze der Schubelastizität gleich Null ist; es würde nicht möglich sein, in kommunizierenden Röhren die geringste Einwirkung eines vorübergehenden äußeren Druckes dauernd zu erhalten.

doch ist es mir bisher nicht gelungen, ein völlig klares Bild zu erhalten. Dies ist auch nicht zu erwarten, da schon die Erscheinungen bei einfachen Zwillingen¹⁾ vorläufig noch einer klaren Deutung ermangeln.

Daß tatsächlich ähnliche Erscheinungen hier mitspielen, kann man konstatieren bei Tropfen von der Form Fig. 4. Der an der Abplattungsstelle angesetzte prismatische Zapfen erscheint zuweilen gelb, während der gegenüberstehende Quadrant weiß ist und umgekehrt. Fig. 25 a bis c zeigt eine häufig vorkommende Form solcher Zwillinge, bei welcher der prismatische Teil überwiegt und an der Grenze ähnliche langgestreckte rhombische Flecke oder Kreuze auftreten wie bei den oben genannten einfachen Zwillingen.

An Stelle eines Zapfens kann an der Abplattungsstelle auch ein entgegengesetzt liegender Tropfen anwachsen. Solche Doppeltropfen sowie die Kombinationen von Tropfen und Prismen können auch durch *Zusammenfließen* der beiden Bestandteile hervorgehen. Beim Zusammenfließen von zwei Tropfen in der ersten Hauptlage entstehen einheitliche Tropfen von gleicher Lage. Bei Kopulation in der zweiten Hauptlage können Tropfen mit zwei oder mehr Abplattungen z. B. mit *regelmäßig polygonalem Umriss* entstehen. Ebenso führt Zusammenfluß beliebig vieler Tropfen zu *fazettierten Kugeln* (Polyedern mit gleichgroßen Flächen), welche durch Anwachsen von Zwillingtropfen auf den Fazetten in *brombeeren-ähnliche Gebilde* übergehen können.

B. Kraftäußerungen und Bewegungserscheinungen.

Die beschriebene Gestaltung der fließenden Kristalle des p-Azoxyzimtsäureäthylesters weicht zwar in manchen Punkten von der sonst bei fließenden Kristallen beobachteten ab, bietet aber im Prinzip Nichts neues, da z. B. auch bei ölsaurem Ammoniak sphärolithische Formen fließender Kristalle neben polyedrischen beobachtet worden sind.²⁾

Völlig neu und für den Beobachter geradezu verblüffend ist dagegen das plötzliche Auftreten von *Trichiten*, sowie deren merkwürdige Bewegungs- und Umwandlungserscheinungen, ver-

1) Vgl. Flüssige Kristalle p. 39.

2) l. c. p. 46 und O. Lehmann, Wied. Ann. 56. p. 784. 1895.

bunden mit Kraftwirkungen und das ebenso plötzliche rätselhafte Verschwinden dieser Trichiten. Seit dem Jahre 1872, also seit mehr als 30 Jahren, bin ich mit eingehendem mikroskopischem Studium der Kristallisationsvorgänge beschäftigt und habe dabei manches Wunderbare, bisher nicht Bekannte gesehen, eine gleich merkwürdige und überraschende Erscheinung, bei welcher die Kristalltropfen gewissermaßen Leben gewinnen und die Fähigkeit fortgesetzter scheinbar willkürlicher Gestaltänderung und Bewegung ohne merkliche Änderung der Umstände ist mir bisher nicht vorgekommen. Das sorgfältige Studium dieser Phänomene dürfte möglicherweise zur Aufklärung über die bei analogen Vorgängen im Reiche der Organismen tätigen Kräfte beitragen können.

Wie schon bemerkt, zeigt ein Tropfen in zweiter Hauptlage einen vom Zentrum nach der Peripherie verlaufenden Strich wie in Fig. 26 (vgl. Fig. 9). Der Endpunkt dieses Striches ist die kritische Stelle, von welcher die Trichitenbildung ihren Ausgangspunkt zu nehmen pflegt. Bei reinen Präparaten, welche außer p-Azoxyzimtsäureäthylester nur Monobromnaphtalin als Lösungsmittel enthalten, sieht man dort, falls durch einen Luftzug die Lösung eine minimale Abkühlung, also Übersättigung erfährt, plötzlich ein außerordentlich feines, aber ebenso außerordentlich langes Haar hervorschießen, welches sich in mannigfaltigsten Windungen und Krümmungen zu einem das ganze Gesichtsfeld einnehmenden Knäuel gestalten kann. Versucht man die Form sich einzuprägen oder sie abzuzeichnen, so ist mit einem Male das ganze Gebilde verschwunden. Man mag es so fest fixieren, wie man will, man kann nicht angeben, wohin es gekommen ist — mit einem Male ist es nicht mehr da. Dazu genügt, daß der Luftstrom wieder aufhört und eine geringe Untersättigung der Lösung eintritt. Man denke aber nicht etwa, daß sich das Gebilde infolge dieser Untersättigung auflöst, wie ein gewöhnlicher Tropfen oder Kristall. Dies würde allmählich geschehen, die Dicke des Fadens, die etwa zwischen 0,001 und 0,01 mm schwankt, müßte allmählich abnehmen. Das ist indes nicht der Fall. Die Dicke bleibt immer gleich bis zum Moment des plötzlichen Verschwindens. Das Verschwinden ist ferner mit Kraftäußerungen verbunden, durch welche in der

Nähe befindliche leichte Körperchen fortgeschleudert werden können. Insbesondere wird in der Regel auch der Tropfen, von welchem der Trichit seinen Ausgang nahm, fortgestoßen.

Durch reichliche Beimischung von anderen Substanzen¹⁾, insbesondere Azoxyphenetol, gelang es sowohl die Bildung der Trichiten, wie ihr Verschwinden so sehr zu verlangsamen, daß der Vorgang in Ruhe studiert werden konnte. Die *Entstehung* erfolgt hiernach, wie die Figg. 27—29 andeuten. Zunächst zeigt sich an der kritischen Stelle eine Vorwölbung, welche hinsichtlich ihrer Struktur einen zweiten an den ersten angesetzten Tropfen darstellt. Sie verlängert sich rasch zu einem geraden Stab von gleichmäßiger Dicke, in welchen sich der vom Zentrum ausgehende Strich hineinzieht bis zum Zentrum des halbkugelförmigen Endes. Der Stab muß nicht notwendig gerade sein, er kann sich biegen und zwar in wechselnder Richtung, so daß man einen aus dem Tropfen herausragenden Wurm zu sehen glaubt. Dieser wird immer länger und durchwächst schließlich in vielfach verschlungenen Windungen das ganze Gesichtsfeld, aber nicht etwa in der Art, daß er *am Ende* wächst, wie etwa ein nadelförmiger Kristall; das Ende wächst vielmehr gar nicht, sondern das Material wird auf der ganzen übrigen Oberfläche aufgenommen, bringt aber nicht, wie zu erwarten, eine Zunahme der Dicke hervor, sondern nur Zunahme der Länge. Man könnte fast sagen, es ist ein Wachstum durch Intus-susception wie im Reiche der Organismen.

Davon, daß wirklich das Ende nicht wächst, kann man sich leicht überzeugen in dem sehr häufig vorkommenden Fall, daß die zuerst entstandene Vorwölbung zunächst zu einem Tropfen von gleicher Größe wie der ursprünglich vorhandene auswächst (Fig. 30). Die beiden Kugeln entfernen sich dann unter Bildung des Trichiten immer weiter voneinander, wie die Figg. 31—33 veranschaulichen. Zwischen gekreuzten Nicols zeigt jede der beiden Kugeln ein schwarzes Kreuz entsprechend den Nicoldiagonalen, und der sie verbindende Faden erscheint überall dunkel, wo er einer dieser Diagonalen parallel ist, am hellsten dagegen da, wo er unter 45° dazu verläuft.

1) Bekanntlich ist solche auch geeignet, die Doppelbrechung zu vermindern (Flüssige Kristalle p. 77) und enantiotrope Umwandlung zu erschweren (l. c. p. 199).

Man könnte allerdings auch annehmen, daß die Substanzaufnahme an der Oberfläche der Kugeln stattfindet und der Faden aus dem Tropfen herausgepreßt werde, wie etwa eine Nudel aus der Nudelmaschine¹⁾, indes bemerkt man in der Regel keine Änderung an den Kugeln, auch ist deren Fehlen ohne Einfluß, dagegen hat man nicht selten Gelegenheit zu beobachten, daß plötzlich an irgendeiner Stelle des Fadens unter Bildung eines noch dünneren, geschlängelten Fadens ganz enormes Längenwachstum eintritt, während die Enden unverrückt stehen bleiben. Fig. 34 zeigt einen Fall dieser Art, wobei sich der Faden mit der Kugel rechts plötzlich von der Kugel links entfernt unter Bildung eines sehr langen, vielfach geschlängelten, äußerst dünnen Fadens.

Es kann auch vorkommen (Fig. 35), daß die Tropfen gar nicht voneinander getrennt erscheinen, sondern einen einzigen länglichen Tropfen bilden, der zwischen gekreuzten Nicols ein schwarzes Kreuz mit breitem Balken zeigt, wenn die Längsrichtung einer Nicoldiagonale parallel ist oder zwei halbe Kreuze wie Fig. 36, wenn sie um 45° dazu steht. Der Tropfen verlängert sich immer mehr, zugleich dünner werdend, zu einem Stab mit gerundeten Enden und achsialem Strich (Fig. 37) und schließlich zu einem vielfach gewundenen Faden (Fig. 38). Dabei können aber manche Variationen eintreten. So beobachtet man häufig, daß zunächst eine Verdünnung in der Mitte eintritt (Fig. 39), oder daß ein Ende unter Ausspinnung eines vielfach geschlängelten feinen Fadens abgestoßen wird (Fig. 40). Es können auch wiederholte Abstoßungen stattfinden wie bei Fig. 41, dabei zeigt aber das Gebilde z. B. beim Strömen der Flüssigkeit um Hindernisse bemerkenswerte Festigkeit, wird nicht in die Länge gezogen und reißt nicht ab.

Kürzere Stückchen wie Fig. 37 bewegen sich häufig ganz selbständig zwischen anderen hindurch in ihrer Längsrichtung in der Flüssigkeit bald vorwärts, bald rückwärts, vergleichbar den Bewegungen mancher Bakterien oder Diatomeen. Es kommen auch Gebilde vor, die in ihrer Gestalt einem Samenfaden ähnlich sehen, indem an einem eiförmigen Kopf ein

1) Über ähnliche Vorgänge vgl. O. Lehmann, halbbegrenzte Tropfen, Wied. Ann. 43. p. 516. 1891 u. Myelinformen, Wied. Ann. 56. p. 771. 1895.

dünnere, verjüngt zulaufender Schweif angesetzt ist, der sich in beständiger schlängelnder Bewegung befindet, während das Ganze langsam fortkriecht.¹⁾

Ferner kommt der Fall vor, daß der Faden aus einzelnen Gliedern besteht (Fig. 42), manchmal von verschiedener Dicke, wobei an den Fugen optische Erscheinungen wie bei Zwillingen auftreten, soweit sich dies bei der sehr geringen Dicke der Fäden erkennen läßt. Die Knoten sind aber nicht dauernd, sondern können von selbst verschwinden.

Befindet sich ein Tropfen in der ersten Hauptlage, so wächst der Trichit scheinbar aus dem Mittelpunkt heraus (Fig. 43), doch kommt der Fall selten vor, vermutlich weil der Zwischenraum zwischen Objektträger und Deckglas zu geringe Dicke hat.

Das *Verschwinden* der Trichiten vollzieht sich gerade umgekehrt wie ihre Bildung. Man kann z. B. einen aus einem Tropfen in zweiter Hauptlage hervordringenden Stab beliebig oft sich wieder in den Tropfen zurückziehen und von neuem hervortreten lassen, wenn man durch ganz schwaches Fächeln in der Nähe des Mikroskopes entsprechende geringe Temperaturänderungen hervorruft.

Die Figg. 45 a—d zeigen die aufeinanderfolgenden Änderungen eines Stabes mit zwei Kugeln bis zur Kontraktion zu einer Kugel im polarisierten Licht. Einen anderen Fall deuten die Figg. 46 a—d an. Hier entstand eine Anschwellung in der Mitte und schließlich wurden die Enden eingezogen. In einem dritten Falle erhielt der Stab mehrere Anschwellungen (Fig. 47); in einem vierten verwandelte er sich gar in eine Art Perlenchnur (Fig. 48). Jede solche Perle zeigte zwischen gekreuzten Nicols ein schwarzes Kreuz, und nach und nach wurden sie alle von der ersten aufgenommen, so daß ein einziger entsprechend großer Tropfen resultierte. Häufig sieht man auch Bildungen wie Figg. 49 u. 50, wobei an den Enden des Fadens mehrere Kugeln auftreten.

In der Regel zieht sich der Faden nicht einfach in eine Kugel hinein, sondern kontrahiert sich, plötzlich krampfhaft

1) Ursache der Bewegungserscheinungen ist wohl wechselnde Oberflächenspannung (vgl. O. Lehmann, *Flüssige Kristalle* p. 252).

eine Spirale oder einen Knäuel bildend, ähnlich den Stielen, an welchen die Vortizellen sitzen, deren Zusammenrollen durch die Kontraktion einer spiralg verlaufenden Muskelfaser bewirkt wird. Der resultierende Tropfen ist deshalb im allgemeinen zusammengesetzter Natur. Fig. 51 zeigt einen solchen Tropfen in erster Hauptlage, wobei sich am Rande ein Kranz gebildet hat von ähnlicher Struktur, wie die oben erwähnten öligen Streifen.

Versucht man sich auf Grund dessen, was oben über die Struktur der Tropfen gesagt wurde, ein Bild zu machen über die Struktur der Trichiten, so müßte man wohl für einen in zwei Kugeln endigenden Stab etwa die in Fig. 52 gezeichnete Struktur annehmen, welche auch mit dem optischen Verhalten insofern übereinstimmt, als der Stab im polarisierten Licht mit scharfen Umrissen und gelb erscheint, wenn seine Längsrichtung senkrecht zur kurzen Nicoldiagonale steht, also die optische Achse der ihn zusammensetzenden kurzen Prismen parallel dazu. In der Tat wurde oben gezeigt, daß in dieser Lage einfache Kristalle scharf und gelb erscheinen. Ist die Längsrichtung des Stabes parallel zur kurzen Nicoldiagonale, so erscheint er blaß und farblos (weiß).

Daß alle neu sich anlagernden Moleküle in das Innere des Stabes hineingezogen werden und dessen Streckung verursachen, kann nur die Wirkung der Kraft sein, die der Oberflächenspannung widerstrebt und sie hindert, den Stab zur Kugel zusammenzudrücken. Diese Kraft ist aber die Elastizität. Ist die Deutung richtig, so läge hier eine ganz neue eigenartige Wirkung der Elastizität vor, die wohl dazu beitragen könnte, dem Verständnis der Kristallisationserscheinungen, insbesondere auch der Bildung der *Myelinformen*¹⁾ näher zu kommen. Die Wirkung ist augenscheinlich dieselbe, wie das spurlose Verschwinden eines kleinen fließenden Kristalles beim Zusammentreffen mit einem großen (durch Homöotropie), wobei die molekulare Richtkraft die Moleküle des kleinen zwingt, sich regelmäßig einzuordnen.

1) Vgl. die Literatur in O. Lehmann, *Flüssige Kristalle* p. 253 u. ff. Nach Quincke beruhen dieselben auf Wirkung kontraktiver, nach Fuchs (Kosmos, Wien. Sitzb.) auf Wirkung expansiver Oberflächenspannung (Exners Repertorium d. Physik 24. p. 614. 1888). Quincke (Ann. d. Phys. 15. p. 55. 1904) hält letztere nicht für experimentell erwiesen.

Versuche, das Wachstum der Stäbchen und Schlangen durch fremde Zusätze zu stören, ergaben folgendes: Schlangen wurden erhalten wie beim reinen Präparat bei Zusatz von: Anisaldazin, Azophenetol, Santonin, Triphenylmethan, Antipyrin, Benzil, Paratoluylsäure, Bromzimtaldehyd, Orthoquecksilberditolyl, Metabinitrobenzol, α -Diäthoxydinaphtostilben, Dibenzoyl- α -dioxychinolin, Parachlorchinolin, Succinylobernsteinsäureester, Orthonitrozimtsäureäther, Toluylendiamin. Nur kleine Schlangen entstanden bei Zusatz von: Piperin, Copaivasäure, Orthoamidobenzoesäure, Paraoxybenzoesäure, Azobenzol, Dinitroorthokresol, Quecksilberdinaphtyl, Phenylpyrazin, Diazoamidoparatoluol, Dichlorhydrochinondicarbonsäurediäthylester, Camphorsäure, Vanillinsäure, Veratrinsäure, Pikrinsäure, Phtalsäure, Orzin, Papaverin. Keine Schlangen wurden erhalten bei Zumischung von: Methoxyzimtsäure, Azoxyanisol, Phtalimid, Phloroglucin, Anthrachinon, Anthragallol, Benzoin etc.

Kann man das Zusammenfließen zweier Kristalltropfen als Analogon des *Kopulationsvorganges* bei Organismen betrachten, so erscheint der häufig zu beobachtende umgekehrte Vorgang, die Selbstteilung eines fließenden Kristalles als Analogon der *Zellteilung*. Ein Zwillings tropfen beispielsweise, bestehend aus zwei mit den Abplattungsstellen aneinanderhaftenden Tropfen, kann plötzlich in die beiden Hälften zerfallen oder ein Stäbchen wie Fig. 37 kann momentan in der Mitte durchbrechen, nachdem zuvor an der betreffenden Stelle von selbst eine Art Scheidewand aufgetreten ist, vorgetäuscht durch eigentümliche Lichtbrechung infolge von Zwillingsbildung. Vermutlich ist, wie auch aus den Erscheinungen der Transkristallisation¹⁾ erschlossen werden kann, an der Stelle, wo die Moleküle in Zwillingsstellung verbunden sind, die Elastizität der Oberflächenspannung nicht mehr gewachsen, so daß letztere eine immer weitergehende Einschnürung, d. h. Trennung hervorbringt. Weiteres über Zwillingsbildung soll in einer folgenden Arbeit, betitelt: Homöotropie und Zwillingsbildung bei fließenden Kristallen, berichtet werden.

Karlsruhe, den 30. November 1905.

1) O. Lehmann, Flüssige Kristalle p. 19.

(Eingegangen 1. Dez., ergänzt durch einige Zusätze am 26. Dez. 1905.)

**4. Feinere Zerlegung der Spektrallinien
von Quecksilber, Kadmium, Natrium, Zink,
Thallium und Wasserstoff;
von L. Janicki.**

(Hierzu Taf. I.)

(Auszug aus der Inaugural-Dissertation Halle a/S. 1905.)

Die Rowlandschen Gitter haben die Genauigkeit spektroskopischer Messungen ganz außerordentlich gesteigert. Sie besitzen eine hohe auflösende Kraft, d. i. die Fähigkeit, zwei Spektrallinien noch zu trennen, deren Wellen sich nur um ein Geringes unterscheiden, aber sie reichen doch nicht hin, um in dieser Beziehung erhöhten Ansprüchen gerecht zu werden. Wenn es auch gelungen ist, Zusammensetzungen von Linien mit Gittern zu beobachten. — A. Michelson¹⁾, O. Lummer²⁾ und A. Hagenbach und H. Konen³⁾ haben Komponenten der Quecksilberlinien in dieser Weise gefunden —, so sind diese Beobachtungen doch stets vereinzelt geblieben, z. T. erst dann gemacht worden, als die Komponenten durch andere Methoden bereits festgestellt worden waren.

Die Frage nach der Zusammensetzung der Linien ist zum erstenmal systematisch und erfolgreich von A. Michelson¹⁾ im Jahre 1892 studiert worden. Sein Interferometer gestattete nicht, die Linien getrennt zu beobachten, sondern nur indirekte Schlüsse zu ziehen, wenn bei Erhöhung des Gangunterschiedes der beiden interferierenden Strahlen die Interferenzringe abwechselnd deutlicher und undeutlicher wurden. Er hat für eine größere Anzahl von Linien aus diesem Intensitätswechsel die Lage der Satelliten zu berechnen versucht, aber kein ein-

1) A. A. Michelson, Phil. Mag. (5) 34. p. 280—299. 1892.

2) O. Lummer, Verhdl. d. deutschen phys. Ges. 1901. p. 95.

3) A. Hagenbach und H. Konen, Zeitschr. f. wissenschaft. Photogr. 1. p. 342—346. 1903.

deutiges Resultat erhalten. Dies gab erst sein Stufengitter¹⁾ das die Linien in ihrer Auflösung gleichzeitig sehen läßt.

Ungefähr gleichzeitig führten Ch. Fabry und A. Perot²⁾ einen beträchtlichen Fortschritt in der Auflösung feinsten Spektrallinien herbei. Ihr Interferometer besteht aus zwei gegeneinander verschiebbaren Glasplatten, die auf den einander zugewendeten Seiten mit einer ganz dünnen Silberschicht bedeckt sind. Läßt man schwach konvergentes Licht senkrecht durch diese „versilberte“ Luftplatte hindurchfallen, so gehen die Strahlen teils direkt, teils nach mehrfachen Reflexionen hindurch, erleiden Gangunterschiede und interferieren. Die kreisförmigen Interferenzringe zeigen dann die Linie in ihrer Auflösung. Die Methode ist nicht nur brauchbar zur Zerlegung der Linien, sondern auch zu relativen Wellenlängenmessungen, die sehr genaue Resultate liefern, und zu Dicken- bez. Längenmessungen. So haben Fabry und Perot eine ganze Reihe von Linien verschiedener Metalle und von dunklen Sonnenlinien relativ zur Wellenlänge der roten und grünen Kadmiumlinie, wie sie von A. Michelson und Benoît³⁾ bei der Meterbestimmung gefunden worden sind, gemessen.

Das Michelsonsche Stufengitter suchten endlich O. Lummer und E. Gehrcke⁴⁾ durch einen technisch einfacheren und dabei doch leistungsfähigeren Apparat zu übertreffen. Die vielfachen Reflexionen im Innern einer planparallelen Glasplatte bei nahe streifendem Austritt der Strahlen geben den austretenden Strahlen einen hohen Gangunterschied.

1) A. A. Michelson, *Astroph. Journ.* 8. p. 36—47. 1898; *American Journ.* (4) 5. p. 215—217. 1898; *Journ. de phys.* (3) 8. p. 305—314. 1899.

2) Ch. Fabry und A. Perot, *Ann. de chim. et phys.* (7) 12. p. 459—501. 1897; 16. p. 115—144. 1899; 22. p. 564—574. 1901; 24. p. 119—139. 1901; 25. p. 98—139. 1902; *Astroph. Journ.* 13. p. 265—272. 1901; 15. p. 73—96, 261—273. 1902; *Compt. rend.* 123. p. 802—805, 990—993. 1896; 126. p. 34—36, 331—333, 407—410, 1561—1564, 1624—1626, 1706—1708, 1779—1782. 1898; 128. p. 1156—1158, 1221—1223. 1899; 130. p. 406—409, 492—495, 653—655. 1900; 132. p. 1264—1266. 1901; 133. p. 153—154. 1901.

3) A. A. Michelson, *Trav. et Mém. du bur. intern. des poids et mesures.* 11. p. 1—85. 1895.

4) O. Lummer u. E. Gehrcke, *Ann. d. Phys.* 10. p. 457—477. 1903.

Die nach diesen Methoden bisher gemachten Beobachtungen widersprechen einander — wahrscheinlich infolge auftretender „Geister“ — ziemlich stark. Am spärlichsten liegen Beobachtungen mittels des Michelsonschen Stufengitters vor. Auf freundliche Anregung von Hrn. Prof. Dr. E. Dorn habe ich einige Spektrallinien mit dem ausgezeichneten Stufengitter des hiesigen physikalischen Instituts untersucht.

Das Michelsonsche Stufengitter.

Aufstellung des Stufengitters.

Das Stufengitter, das ich zu meinen Untersuchungen benutzte, ist von A. Hilger in London angefertigt. Die Anordnung ist in Fig. 1 schematisch dargestellt. Sp_1 bis Sp_2 ist ein Hilfsspektroskop und dient zu einer vorgängigen Zerlegung des Lichtes. Der Spalt Sp_1 befindet sich in der Brennebene der Linse L_1 . P ist ein Prisma mit konstanter Ablenkung. Die Linse L_2 wirft ein scharfes Bild der Linien auf den Spalt Sp_2 . Die Linse L_3 macht die von Sp_2 ausgehenden Strahlen parallel;

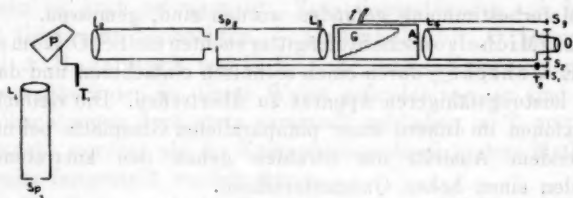


Fig. 1.

diese treten parallel in das Gitter G und werden von der Linse L_4 in deren Brennebene vereinigt, die ihrerseits durch das Okular O betrachtet wird.

Durch die Schraube S_1 kann das Prisma P so gedreht werden, daß ein beliebig gewünschter Teil des Spektrums durch das Gitter geschickt wird. Die Trommel T_1 gestattet diese Stellung abzulesen und jederzeit wiederzufinden. Durch die Schraube S_2 kann der zweite Spalt Sp_2 beliebig gestellt und die Weite des Spaltes an der Trommel T_2 abgelesen werden. Das eigentliche Stufengitter G endlich ruht auf einem Tischchen, das in horizontaler Ebene um die Achse A drehbar ist

und durch S_3 beliebig aus- und eingeschaltet werden kann. Diese Anordnung bietet den Vorteil, sehr leicht diejenige Einstellung zu finden, in der das Licht senkrecht durch das Gitter tritt. Denn führt man das Gitter ein, so beobachtet man gleichzeitig durch O , wie die Interferenzstreifen nach einer bestimmten Richtung wandern, und, wenn der senkrechte Einfall des Lichtes erreicht ist, sich nach der entgegengesetzten Richtung wenden. Es liegt also etwas Ähnliches wie bei der Minimumstellung eines Prismas vor. Diese Stellung ist jederzeit rasch zu finden. Schaltet man das Stufengitter (in der Richtung des Pfeiles) aus und verbreitert den Spalt Sp_2 , so kann man einen großen Teil des vom Prisma entworfenen Spektrums überblicken und eine beliebige Linie zur Untersuchung auswählen.

Am geeignetsten für die Beobachtung erwies sich ein von Zeiss-Jena bezogenes Okular von 12 cm Brennweite. An Stelle des Okulars kann ein einfacher photographischer Apparat eingeschoben werden: ein Rohr trägt an einem Ende eine Vorrichtung zur Aufnahme der Kassette, nach dem anderen Ende zu enthält es eine Linse, die ein scharfes Bild der Brennebene von L_1 auf die Platte werfen soll.

Das Stufengitter G ist von Hilger in ganz außerordentlicher Trefflichkeit hergestellt worden. Es besteht aus 32 je 1 cm dicken Glasplatten, die aufeinander gepreßt sind, so daß jede folgende Platte gegen die vorhergehende um 1 mm zurücktritt. Die Zahl der wirksamen Öffnungen ist 33, da zwischen der größten Glasplatte und dem Stahlrahmen, der auf dieser Seite die Platten abschließt, noch eine Öffnung von 1 mm gelassen worden ist. Die Ungleichheiten in der Höhe der Stufen sind nach Hilgers Angaben geringer als $\frac{1}{30}$ Wellenlänge. Hiernach dürften „Geister“ nahezu ausgeschlossen sein. Meine Beobachtungen bestätigen dies durchaus.)

Theorie und Anwendung des Stufengitters.

Eine Berechnung der Dispersion und Leistungsfähigkeit des Stufengitters hat Michelson in den p. 37 angeführten

1) Vgl. p. 79.

Abhandlungen gegeben; außerdem ist sie zu finden bei P. Drude¹⁾ und H. Kayser.²⁾

Ist s die Weite der Stufen, t die Dicke der Glasplatten, μ der Brechungsindex des Glases, so gilt für die Änderung des Beugungswinkels θ mit der Änderung der Wellenlänge λ

$$(1) \quad \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{t}{s \cdot \lambda} \left[(\mu - 1) - \lambda \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} \right].$$

Der Abstand zweier Komponenten wird bestimmt aus

$$(2) \quad d\lambda = \frac{\lambda^2}{t \left[(\mu - 1) - \lambda \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} \right]} \frac{d\theta}{d\theta_1} + p \frac{\lambda^2}{t \left[(\mu - 1) - \lambda \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} \right]},$$

wo $d\theta_1$ die Winkeltrennung zweier Ordnungen ist und p eine der Zahlen 0, ± 1 , $\pm 2 \dots$ sein kann. Im allgemeinen ist $p = 0$; setzt man in diesem Falle $d\theta = d\theta_1$, so erhält man die Entfernung zweier benachbarter Ordnungen. Der zweite Summand darf jedoch nicht völlig außer acht gelassen werden wegen der großen Nähe der beiden überhaupt möglichen Ordnungen. Die beiden gelben Natriumlinien können gleichzeitig im Stufengitter gesehen werden, obwohl ihre Wellenlängen sich um 5,972 Å.-E. unterscheiden und die Entfernung der beiden Ordnungen für D_1 nur 0,564 Å.-E. beträgt. Dann hat eben p den Wert 10 erlangt.

Daher sind bis zu einem gewissen Grade die Ergebnisse, die das Stufengitter liefert, nicht eindeutig bestimmt. Ein Beispiel bietet die starke Heliumlinie $\lambda 5876$, die bekanntlich aus zwei Linien, einer starken und einer mehr nach rot zu liegenden schwachen besteht. Fig. 2 gibt die Linie im



Fig. 2.

Stufengitter wieder, wenn die stärkere Komponente in zwei Ordnungen sichtbar ist. Hier gehört die schwache Komponente zu dem rechts liegenden Maximum, nicht, wie man anfänglich zu vermuten geneigt ist, zu dem linken Maximum. p hätte also in diesem Falle den Wert -1 . In allen den Fällen aber, in denen im zweiten Summanden $p \neq 0$ ist, müssen die Komponenten eine so große Entfernung von der Hauptlinie haben, daß sie unter allen Umständen durch ein Spektro-

1) P. Drude, Lehrbuch der Optik p. 211—215. 1900.

2) H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie 1. p. 482—485. 1900.

skop von relativ kleiner auflösender Kraft festgestellt werden können.

Das Auflösungsvermögen ist

$$(3) \quad \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{n \cdot t}{\lambda} \left[(\mu - 1) - \lambda \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} \right],$$

wo $\delta\lambda$ die Grenze der der Auflösung fähigen Wellenlängendifferenz und n die Anzahl der beugenden Öffnungen des Stufengitters bedeutet.

Im vorliegenden Falle ist $s = 1$ mm, $t = 10$ mm und $n = 33$. Nach Hilgers Angaben ist das Stufengitter hergestellt aus Jenaer Glas, das den Brechungsexponenten hat

$$\mu_C = 1,5706; \quad \mu_D = 1,5746; \quad \mu_F = 1,5845; \quad \mu_{G'} = 1,5927.$$

Die Indizes bedeuten die betreffende Fraunhofersche Linie; mit G' ist die in der Nähe von G liegende Wasserstofflinie $\lambda = 4341$ Å.-E. gemeint.

Weder die Cauchysche Formel

$$\mu_1 = A_1 + \frac{B_1}{\lambda^2} + \frac{C_1}{\lambda^4}$$

noch die Schmidtsche¹⁾ Formel

$$\mu_2 = A_2 + \frac{B_2}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda^2}$$

geben, wenn man die drei Konstanten A , B , C aus den drei ersten der gegebenen Werte für μ berechnet, eine Übereinstimmung mit dem vierten Wert. Am besten stimmen die Mittel aus beiden Formeln für den vierten Wert $\mu_{G'}$. In dieser Weise berechnete ich auch die für die Formeln (2) und (3) nötigen Werte von μ und $d\mu/d\lambda$ aus

$$\mu_1 = 1,55408 + \frac{6,978 \cdot 10^8}{\lambda^3} + \frac{5,13 \cdot 10^{11}}{\lambda^4},$$

$$\mu_2 = 1,54357 + \frac{1,6224 \cdot 10^9}{\lambda} + \frac{4,2253 \cdot 10^{12}}{\lambda^2},$$

$$\frac{d\mu_1}{d\lambda} = - \left[\frac{13,956 \cdot 10^{12}}{\lambda^4} + \frac{20,52 \cdot 10^{15}}{\lambda^5} \right],$$

$$\frac{d\mu_2}{d\lambda} = - \left[\frac{3,2448 \cdot 10^9}{\lambda^2} + \frac{16,9012 \cdot 10^{12}}{\lambda^3} \right].$$

λ ist hier in Ångström-Einheiten [$1 \text{ Å.-E.} = 10^{-7} \text{ mm}$] ausgedrückt.

1) H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie 1. p. 325—326. 1900.

In der folgenden Tabelle sind für die Fraunhoferschen Linien die Werte von μ , $d\mu/d\lambda$, dem Auflösungsvermögen $\lambda/\delta\lambda$, der Entfernung der beiden Ordnungen $d\lambda_{\max.}$ und der Grenze der Auflösung $\delta\lambda$ zusammengestellt. Das Steigen bez. das Fallen der ersten vier Größen mit abnehmender Wellenlänge ist außerdem in Fig. 3 veranschaulicht.

	A	B	C	D ₁	E ₁	F	G	H
$\lambda =$	7621	6870	6563	5896	5270	4861	4308	3969
$\mu =$	1,5662	1,5691	1,5706	1,5746	1,5799	1,5845	1,5933	1,6010
$-\frac{d\mu}{d\lambda} =$	33,4	44,9	51,2	70,7	100,2	130,0	194,9	259,4
$\frac{\lambda}{\delta\lambda} \cdot 10^{-5} =$	2,56	2,88	3,04	3,45	3,96	4,40	5,19	5,85
$d\lambda_{\max.} =$	0,982	0,787	0,713	0,564	0,439	0,365	0,274	0,224
$\delta\lambda =$	0,030	0,024	0,022	0,017	0,013	0,011	0,008	0,007

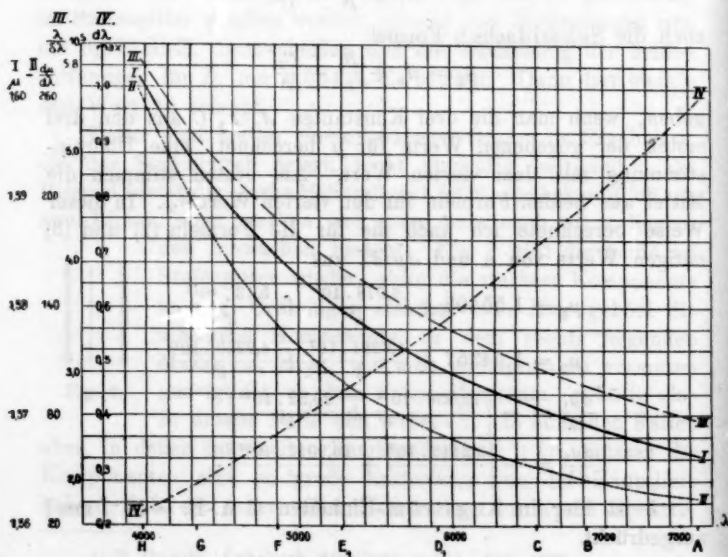


Fig. 3.

Die auflösende Kraft des Stufengitters steigt also von A bis H um mehr als das Doppelte, die Grenze der Auflösung um das Vierfache.

Aus Gleichung (1) p. 40 läßt sich die Dispersion $d\theta$ berechnen. Für die grüne Kadmiumlinie $\lambda 5086$ ist z. B.

$$(\mu - 1) - \lambda \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} = 0,6389; \quad d\theta = 6389 \cdot \frac{t \cdot d\lambda}{s \cdot \lambda}.$$

Setzen wir $d\lambda = 0,1 \text{ \AA.-E.}$, so ergibt sich $d\theta = 0,000126$ abs. oder $d\theta = 0,43$ Bogenminuten. Für die Grenze der Auflösung $\delta\lambda = 0,012$ ist $d\theta = 0,05$ Bogenminuten.

Eine hinreichend homogene Spektrallinie falle auf den enggestellten zweiten Spalt Sp_2 (Fig. 1). Beobachtet man mit eingeschaltetem Stufengitter, das in seiner Minimumstellung sich befindet, so können drei Fälle eintreten: 1. Es ist eine einzige helle Linie sichtbar, rechts und links davon eine Reihe schwacher Beugungsbilder mit abnehmender Intensität. 2. Man sieht zwei helle Linien von gleicher Intensität, wiederum begleitet von den schwachen Seitenlinien. Die beiden Linien stellen die zwei möglichen Ordnungen derselben Linie dar. 3. Es kann die eine dieser beiden Linien heller als die andere sein. Aus einer dieser drei Stellungen kann man durch eine ganz geringe Wendung des Gitters zu den beiden anderen übergehen. Für den Gebrauch kommen die schwachen seitlichen Linien nicht in Betracht. Am vorteilhaftesten ist die Beobachtung in zwei Ordnungen, einmal, weil die Kenntnis des Abstandes der beiden aufeinanderfolgenden Ordnungen für die Berechnung der Entfernung der zu bestimmenden Komponenten notwendig ist, so dann, weil leichter zu übersehen ist, wieviel Komponenten eine Linie besitzt. Ich habe deshalb auch die Photographien (vgl. Taf. I) so angefertigt, daß die stärkste Linie, die Hauptlinie, in zwei Ordnungen erscheint.

Zum Photographieren benutzte ich verschiedene Platten. Für die gelben und grünen Quecksilberlinien verwendete ich anfänglich die Viridinplatte von Dr. Schleussner-Frankfurt a. M.; später benutzte ich für längere Wellen bis $\lambda 5000$ die Äthylrotplatte von Prof. Dr. Miethe und Dr. Traube aus der Trockenplattenfabrik von Otto Perutz-München. Diese letzte Platte mußte, da sie auch gegen rot empfindlich ist, wenigstens während der ersten Minuten völlig im Dunkeln

entwickelt werden. Für die kürzeren Wellen von λ 5000 bis λ 4000 verwandte ich Lumière-Platten. Als Entwickler diente mir Rodinal, zum Fixieren ein saures Fixierbad.

Taf. I gibt die von verschiedenen „Linien“ gemachten Aufnahmen wieder. Sie ist von der Gesellschaft für vervielfältigende Kunst Heliograph in Berlin SW., Friedrichstraße 239, in ausgezeichnete Weise hergestellt worden. Die Photographien sind vierfach vergrößert und geben so ziemlich alle Details der Platten selbst wieder.¹⁾

Die Photogramme sind sämtlich in der Weise wiedergegeben, daß man von der Hauptlinie nach links zu die Komponenten größerer Wellenlänge, nach rechts die kleineren Wellenlänge sieht.

Die Messungen gehen von der Hauptlinie aus und zählen als $+d\lambda$ die weniger brechbaren Trabanten, als $-d\lambda$ die stärker brechbaren. Lag ein Trabant etwa in der Mitte zwischen den beiden Ordnungen der Hauptlinie, so bezog ich ihn stets auf diejenige Seite der Hauptlinie, auf der er ihr, wenn auch nur um ein ganz geringes, näher lag.

Die Platten wurden mit einer Teilmaschine gemessen. Ablesungsfehler suchte ich durch wiederholte Messungen an verschiedenen Platten zu eliminieren. Ein Maß der Genauigkeit läßt sich jedoch nicht ohne weiteres für alle Linien in gleicher Weise angeben. Sie hängt ab von der Stärke, der Schärfe der Trabanten und auch von der Breite der Hauptlinien. Außerdem nimmt die Genauigkeit nach dem violetten Ende des Spektrums zu, entsprechend dem Wachstum der auflösenden Kraft des Stufengitters mit der Abnahme der Wellenlänge. Im allgemeinen dürfte ein größerer Fehler als 0,01 bis 0,02 Å.-E. bei den ganz schwachen Linien, die man in der Reproduktion nicht mehr sehen kann, 0,005 bei den verwaschenen Linien und 0,003 bei den scharfen Linien kaum vorkommen. Die Differenz der beiden Heliumlinien λ 5876 habe ich zu 0,347 Å.-E. bestimmt, in guter Übereinstimmung mit der Messung von Runge und Paschen²⁾, die 0,348 Å.-E. gefunden hatten.

1) Retouche ist selbstverständlich nicht angewendet worden.

2) C. Runge u. F. Paschen, *Astrophys. Journ.* 3. p. 1—28. 1896. Auf diese endgültigen Resultate ihrer Messungen, die mir nicht zugäng-

Um Linien im Stufengitter beobachten und auf ihre Zusammensetzung hin zu prüfen, ist vor allem nötig, sie so scharf als möglich zu erhalten. Damit aber das theoretische Auflösungsvermögen wirklich erreicht wird, darf die Breite der Linien, die p. 42 gegebene Grenze der Auflösbarkeit nicht überschreiten. Die gebräuchlichsten Arten der Erzeugung des Spektrums versagen hier mehr oder weniger. Metallsalze in der Bunsenflamme sind völlig ausgeschlossen: die Natriumlinien geben z. B. nur ein breites Band. Auch der elektrische Funke zwischen Metallelektroden ist nicht ohne weiteres anwendbar. Erst Parallelschalten von 6—10 großen Leidener Flaschen und Einschalten einer genügenden Selbstinduktion in den Sekundärkreis des Induktoriums läßt die Linien vieler Metalle ziemlich scharf werden. Sehr nahe an der Hauptlinie gelegene Trabanten kann man freilich so nicht beobachten, das Zeeman-Phänomen jedoch läßt sich in dieser Weise sehr gut verfolgen. Über den elektrischen Bogen in atmosphärischer Luft habe ich keine Erfahrung. Ich glaube aber nicht, daß er sehr günstig ist, da bereits der Quecksilberbogen im Vakuum bei fehlender Wasserkühlung für manche Linien unbrauchbar ist. Es bleibt also nur das Geisslerrohr, in dem die unter schwachem Druck stehenden Gase oder Dämpfe durch elektrische Entladung zum Leuchten gebracht werden. Den „Trembleur“ von Ch. Fabry und A. Perot¹⁾ habe ich nicht benutzt.

Je größer die Intensität einer scharfen Linie ist, um so leichter ist sie im Stufengitter zu beobachten. Wenn man jedoch die Intensität zu steigern sucht, erhält man meist eine Selbstumkehr der Linien, die sich bei der großen auflösenden Kraft des Gitters leicht bemerkbar macht. Die Selbstumkehr tritt oft mit großer Beständigkeit auf; eine Entscheidung darüber, ob Selbstumkehr vorliegt, oder ob zwei Linien vorhanden sind, ist bisweilen unmöglich. Stellt man ein Geisslerrohr so auf, daß die Kapillare senkrecht zum Spalt gerichtet ist, so hat man zwar bedeutend mehr Licht, als wenn die

lich gewesen waren, hat mich Hr. Prof. Dr. F. Paschen aufmerksam gemacht.

1) Ch. Fabry u. A. Perot, *Compt. rend.* 130. p. 406—409. 1900.

Kapillare quer oder parallel zum Spalt steht, aber die Linien kehren sich leicht um. So gab mir bei Längssicht eine Heliumröhre, die unter 10 mm Druck gefüllt war, im Stufengitter Hauptlinie und Trabant von λ 5876 in Selbstumkehr; parallel zum Spalt gestellt, zeigte sich keine Umkehr, ebenso auch nicht bei Längssicht, wenn der Druck in der Röhre nur 5 oder 3 mm stark war. Weitere Fälle von Selbstumkehr wird man im folgenden noch zahlreich finden.

Die Quecksilberlinien.

Die bisher durch verschiedene Methoden gewonnenen Resultate stimmen auch nicht angenähert miteinander überein. Es war also nötig, die Leuchtbedingungen möglichst zu variieren, um festzustellen, ob die Abweichungen auf Veränderungen in den Komponenten einer Linie zurückzuführen seien.

Die Quecksilberlinien im Bogen.

Die Quecksilberbogenlampe von Arons¹⁾ in der Form, die ihr O. Lummer²⁾ gegeben hat, lieferte das brauchbarste Licht zur Bestimmung der Trabanten der Quecksilberlinien. Bei 30 Volt Klemmspannung schaltete ich 0,8 Ohm vor die Lampe, so daß sie mit 10—11 Amp. brannte. Das Beschlagen der herausragenden Enden wurde durch eine kleine Heizspirale beseitigt. Die Wasserkühlung wirkt bei dieser Form der Lampe direkt auf den brennenden Lichtbogen. Dadurch wird die Temperatur des Bogens so herabgesetzt, daß die ausgesandten Linien eine sehr große Schärfe besitzen.

Weniger brauchbar, wenigstens für bestimmte Linien, ist die Quarzlampe von Heraeus-Hanau (110 Volt, 2,5 Amp.). In den ersten 1—2 Minuten ihres Brennens gibt sie alle Linien in derselben Schärfe wie die Lummersche Lampe. Allein bald verbreitern sich viele Linien infolge gesteigerter Temperatur und erhöhten Druckes des Quecksilberdampfes. Außerdem stand mir noch eine kleine Quarzlampe von Heraeus (220 Volt) zur Verfügung. Durch Ausschalten des vorgelegten

1) L. Arons, Wied. Ann. 58. p. 73—85. 1896.

2) O. Lummer, Zeitschr. f. Instrumenk. 21. p. 201—204. 1901.
Die dort in Fig. 2 und 4 abgebildete Form ist von mir benutzt worden.

Widerstandes kann Temperatur und Dampfdruck im Bogen beträchtlich erhöht werden; Hand in Hand geht damit auch eine große Lichtsteigerung. An Widerstand wird anfänglich ca. 350 Ohm vorgelegt. Die Form dieser kleinen Quarzlampe ist aus Fig. 4 ersichtlich. Q_1 und Q_2 sind die Oberflächen des Quecksilbers. Um die Lampe zu entzünden, wird der eine Pol eines ganz kleinen Induktionsapparates an die Quecksilberkathode, der andere Pol an den Draht R gelegt, den man 1—2 mm über dem Niveau der Quecksilberkathode außen um das Rohr herumlegt; wird nun das Quarzrohr an der Kathode mit einem Bunsenbrenner erwärmt, so erfolgt die Zündung durch einen geringen Induktionsstrom. Die Lampe brennt je nach dem vorgelegten Widerstand mit 0,2—0,5 Amp. Bei zu hoher Beanspruchung, d. h. wenn der Vorschaltwiderstand nicht mehr als 110 Ohm beträgt, erlischt die Lampe von selbst.

Die folgenden in Tabellen dargestellten Messungen und Intensitätsangaben und die Photographien¹⁾, Taf. I, Nr. 1—7, beziehen sich nur auf die Lummersche Lampe, die die feinsten Spektrallinien gibt. Die

Hauptlinie, d. i. die stärkste Linie aller Komponenten, ist in zwei Ordnungen von gleicher Intensität sichtbar; zwischen diesen beiden Linien sind sämtliche Trabanten zu suchen, und zwar liegen nach links von der Hauptlinie die Komponenten größerer Wellenlänge, nach rechts zu die kleineren Wellenlänge.

Da die ganz schwachen Trabanten, die nur $\frac{1}{10}$ der Intensität der Hauptlinie besitzen, in der Reproduktion meist nicht sichtbar sind, habe ich noch in Fig. 5—11 die Zusammensetzung der Linien durch Zeichnung dargestellt. Die Intensität der Linien ist als Ordinate aufgetragen, die Kom-

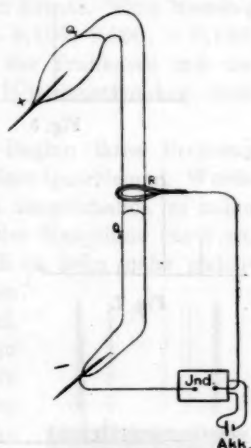


Fig. 4.

1) Die Photographien sind vielfach aufgenommen worden; sie zeigten immer das gleiche Aussehen der Linien.

ponenten in Entfernungen von der Hauptlinie, gemäß ihrem $d\lambda$. Um den Vergleich mit den Photographien zu erleichtern, habe ich nach links von der Hauptlinie die Trabanten größerer Wellenlänge, nach rechts die kleineren Wellenlänge gelegt.

$$\lambda = 5790 \text{ \AA.-E. (gelb).}$$

Vgl. Taf. I, Nr. 1 und Fig. 5. Belichtungsdauer 15 Min. Entfernung der Ordnungen $d\lambda_{\max} = 0,542 \text{ \AA.-E.}$, Grenze der



Fig. 5.

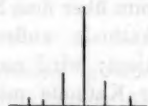


Fig. 6.



Fig. 7.



Fig. 8.

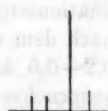


Fig. 9.

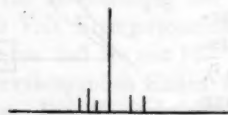


Fig. 10.



Fig. 11.

Auflösung $\delta\lambda = 0,016 \text{ \AA.-E.}$ In Taf. I, Nr. 1 ist rechts von der rechten Ordnung der Hauptlinie noch eine schwache Linie zu sehen. Es ist dies nur eine Wiederholung der Komponente $-0,119$.

Die Komponenten sind:

$$+0,230(^{1/7}); +0,168(^{1/10}); +0,132(^{1/7}); +0,084(^{1/9});$$

$$\text{Hauptlinie (1); } -0,119(^{1/8}); -0,187(^{1/10}); -0,251(^{1/10}).$$

Die eingeklammerten Zahlen bezeichnen die Intensität und haben nur angenäherte Gültigkeit.

Die Linien sind sämtlich sehr scharf. Die Wiedergabe der Photographie der Linien läßt die Komponenten $-0,187$ und $-0,251$ nicht erkennen. Sie sind auch auf den Platten

kaum sichtbar. Der Trabant $+0,168$ ist nur am oberen Rande zu sehen. Die übrigen Linien wird man leicht wiedererkennen.

Die große Quarzlampe lieferte dieselben Linien nur während der ersten 2 Minuten ihres Brennens in gleicher Schärfe. Dann aber wurden die Linien unscharf, sie verschwammen endlich in dem immer heller werdenden Hintergrund, so daß man nur noch die drei stärksten Komponenten als sehr verwaschene Linien wahrnehmen konnte. Eine Messung dieser Komponenten ergab $+0,236$; $+0,136$; $0,000$; $-0,124$. Wenn man die Unschärfe und Breite der Trabanten und der Hauptlinie berücksichtigt, so ist die Übereinstimmung doch noch gut zu nennen.

Die kleine Quarzlampe gab zu Beginn ihres Brennens natürlich dasselbe Resultat wie die größere Quarzlampe. Wurde aber der Widerstand bis auf 120 Ohm ausgeschaltet, so nahm die Helligkeit der Komponenten und der Hauptlinie rasch zu. Sie kehrten sich zum Teil um, so daß ca. zehn nahe gleichstarke Linien sichtbar waren. Dies konnte nur in der ersten Minute nach der Zündung beobachtet werden. Dann verbreiterten sich die Linien und hoben sich immer weniger von dem heller werdenden Hintergrunde ab; schließlich konnte man, wenn in zwei Ordnungen beobachtet wurde, in einer diffusen Helligkeit sechs äquidistante verwaschene Streifen, wie es Fig. 12 darstellt, sehen. Es würde also die Linie selbst aus fünf äquidistanten Streifen bestehen. In Fig. 12 ist über diesen Streifen das entsprechende Bild, wie es die Lummersche Lampe von dieser Linie gibt, gezeichnet. Ich habe beides gleichzeitig beobachtet, indem ich das Licht einer der beiden Lampen durch ein Vergleichsprisma mit totaler Reflexion gleichzeitig in das Stufengitter schickte.



Fig. 12.

$$\lambda = 5769 \text{ \AA.-E. (gelb).}$$

Vgl. Taf. I, Nr. 2 und Fig. 6. Belichtungsdauer 15 Min.
 $d\lambda_{\text{max.}} = 0,538 \text{ \AA.-E.}; \delta\lambda = 0,016 \text{ \AA.-E.}$

Die Komponenten sind:

$$+ 0,120 (\frac{1}{10}); + 0,087 (\frac{1}{10}); + 0,046 (\frac{1}{3});$$

$$\text{Hauptlinie (1); } - 0,050 (\frac{1}{4}); - 0,113 (\frac{1}{8}).$$

In Nr. 2 der Reproduktionen treten die Linien nicht in der wirklichen Schärfe hervor, weil die starken Linien sehr nahe beieinander liegen. Will man auch die ganz schwachen Trabanten auf der Photographie erhalten, so muß etwas länger belichtet werden. Dann schwärzen aber die stärkeren Komponenten die Platte so sehr, daß sie sich nicht mehr in ihrer wahren Schärfe abheben. Bei Okularbeobachtung kann man in dem Raum zwischen den beiden Hauptlinien noch eine Reihe ganz feiner schwacher Linien sehen. Jedoch ist über deren Lage und Zahl ihrer Feinheit wegen nichts Bestimmtes anzugeben. Die Komponente $+ 0,087$ ist in Nr. 2, Taf. I unsichtbar; gerade noch zu erkennen ist $+ 0,120$. Die starke Komponente $+ 0,046$ tritt namentlich in der oberen Hälfte links von der rechten Ordnung der Hauptlinie gut hervor, ebenso auch die starke Komponente $- 0,050$ rechts von der linken Ordnung der Hauptlinie. Der schwache Trabant $- 0,113$ ist deutlich wahrzunehmen.

Beide Quarzlampen lieferten wieder dasselbe Resultat wie bei $\lambda 5790$. Nach 2 Minuten ist nur noch die Hauptlinie zu sehen, deren Intensität nach beiden Seiten hin allmählich abnimmt. Mit der kleinen Quarzlampe können die fünf äquidistanten, verwaschenen Streifen wieder beobachtet werden, wenn man genügend Widerstand ausschaltet.

$$\lambda = 5461 \text{ \AA.-E. (hellgrün).}$$

Vgl. Taf. I, Nr. 3 und Fig. 7. Belichtungsdauer 5 Min.
 $d\lambda_{\text{max.}} = 0,476 \text{ \AA.-E.}; \delta\lambda = 0,014 \text{ \AA.-E.}$

Die Komponenten sind:

$$+ 0,133 (\frac{1}{3}); + 0,088 (\frac{1}{3});$$

$$\text{Hauptlinie (1); } - 0,066 (\frac{1}{7}); - 0,099 (\frac{1}{10}); - 0,232 (\frac{1}{6}).$$

Die hier angegebenen Linien treten sämtlich auf der in Taf. I, Nr. 3 mitgeteilten Photographie scharf hervor; auch der schwache Satellit $- 0,099$ ist gut sichtbar. Die Komponente $- 0,232$ liegt nahezu in der Mitte zwischen den beiden

Maxima der Hauptlinie. Sie könnte also auch als $+0,244$ angesehen werden. Die Hauptlinie ist umgekehrt. In der Reproduktion ist die Selbstumkehr kaum zu sehen, dagegen kann sie mit dem Okular deutlich wahrgenommen werden.

Die große Quarzlampe lieferte dasselbe Resultat, mit dem einzigen Unterschied, daß die Umkehr ein wenig mehr hervortrat. Während bei der Lummerschen Lampe die Entfernung beider Teile der Umkehr $0,027 \text{ \AA.-E.}$ betrug, war bei der Quarzlampe eine solche von $0,036$ vorhanden. Und mittels der kleinen Quarzlampe konnte man durch Ausschalten von Vorschaltwiderstand die beiden Teile immer weiter auseinandertreiben, so daß sie schließlich fast mit den benachbarten Trabanten zusammenfielen. Die Komponenten gewannen gleichzeitig beträchtlich an Stärke bis auf die Komponente $-0,232$. Legte man 440 Volt mit einem anfänglichen Widerstand von ca. 750 Ohm an und verminderte diesen bis auf etwa 150 Ohm , so zeigten sich wieder die fünf äquidistanten verschwommenen Linien (Fig. 13) wie bei den beiden gelben Linien. Das Eintreten dieser Erscheinung konnte bei den folgenden Linien nicht mehr beobachtet werden.

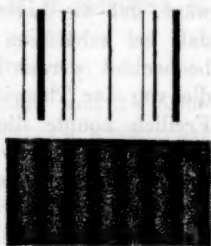


Fig. 13.

$\lambda = 4916 \text{ \AA.-E.}$ (dunkelgrün, lichtschwach).

Weder die Lummersche Lampe noch die Quarzlampe ließen Trabanten erkennen, trotz mehr als einstündiger Exposition und mehrfachen Versuchs mit allen drei verwendeten Plattensorten.

$\lambda = 4359 \text{ \AA.-E.}$ (indigo).

Vgl. Taf. I, Nr. 4 und Fig. 8. Belichtungszeit 10 Min.
 $d\lambda_{\text{max.}} = 0,282 \text{ \AA.-E.}$; $\partial\lambda = 0,009 \text{ \AA.-E.}$

Die Komponenten sind:

$+0,121 (\frac{2}{3})$; $+0,105 (\frac{2}{3})$; $+0,043 (\frac{1}{4})$; $+0,020 (\frac{1}{5})$;

Hauptlinie (1); $-0,023$ (1); $-0,052 (\frac{1}{7})$; $-0,097 (\frac{2}{3})$;

$-0,112 (\frac{2}{3})$.

Hier kann man eigentlich von einer Hauptlinie nicht sprechen. Ich habe willkürlich eine von den beiden stärksten Linien als Hauptlinie angenommen. Die Trennung derselben kann man in der Reproduktion in der linken Ordnung noch erkennen, auch die beiden schwachen Linien $+0,020$ und $-0,052$ sind gerade noch zu sehen; dagegen sind hier die Doppellinien $+0,121$ und $+0,105$ und ebenso $-0,097$ und $-0,112$ nicht mehr getrennt wahrzunehmen. Meine Platten zeigen die Trennung aber noch sehr deutlich. Diese Doppellinien differieren um $0,016$ bez. $0,015$ Å.-E. Wenn man erwägt, daß die Linien hier sämtlich verwaschen sind, so folgt, daß bei schärferen Linien auch ein $\delta\lambda = 0,009$ Å.-E. noch beobachtet werden könnte, d. h. eben, daß das Stufengitter die von der Theorie geforderte Auflösung auch wirklich gibt. Freilich konnte diese hohe Auflösung nur dadurch erreicht werden, daß der zweite Spalt Sp_2 Fig. 1 so eng gestellt wurde, daß er nur noch eine ganz minimale Lichtmenge hindurchließ. Die Platte erforderte zur Belichtung 10 Min., eine für die starke und auf die photographische Schicht sehr wirksame Linie lange Zeit.

Mit dem bloßen Auge beobachtet man als Hauptlinie ein breites Band, das etwa von $-0,020$ bis $+0,052$ reicht, die beiden Doppellinien und $+0,043$.

Die Quarzlampe gibt die Linien noch weniger scharf. Das breite Band, das man hier als Hauptlinie ansieht, umschließt auch noch $+0,043$; auf der photographischen Platte kann man in ihm drei Linien wahrnehmen, eine stärkere in der Mitte, begleitet von einer schwächeren auf beiden Seiten. Die beiden starken Doppellinien sind hier als solche nicht zu erkennen. Die Ausmessung der Platten ergab: $+0,106$ ($\frac{1}{3}$); $+0,035$ ($\frac{1}{4}$); $+0,000$ ($\frac{1}{2}$); $-0,036$ ($\frac{1}{4}$); $-0,111$ ($\frac{1}{3}$). Die eingeklammerten Zahlen geben die Intensitäten an, wobei die Intensität der drei Linien in dem breiten Bande zusammengekommen als 1 angesetzt ist.

Es ist nicht unmöglich, daß die Doppellinien $+0,121$ und $+0,105$; $0,000$ und $-0,023$; $0,097$ und $-0,112$ nichts anderes sind als bloße Umkehrungen. Doch konnte diese Frage nicht entschieden werden.

$\lambda = 4348 \text{ \AA.-E.}$ (indigo, lichtschwach).

Vgl. Taf. I, Nr. 5 und Fig. 9. Belichtungszeit 15 Min.

$d\lambda_{\text{max.}} = 0,280 \text{ \AA.-E.}; \delta\lambda = 0,008 \text{ \AA.-E.}$

Die Komponenten sind:

+ 0,083 ($1/7$); + 0,053 ($1/7$); Hauptlinie (1); - 0,046 ($1/6$).

Die Linien sind mäßig scharf; die Quarzlampe gab keinen deutlich erkennbaren Trabanten.

$\lambda = 4339 \text{ \AA.-E.}$ (indigo, lichtschwach).

Belichtungszeit 20 Min. $d\lambda_{\text{max.}} = 0,279 \text{ \AA.-E.}; \delta\lambda = 0,008 \text{ \AA.-E.}$

Die Komponenten sind:

+ 0,06 ($1/10$); Hauptlinie (1); - 0,12 ($1/10$).

Diese Linie ist nicht in Taf. I enthalten, weil die Komponenten zu schwach waren, um sie erfolgreich wiedergeben zu können.

$\lambda = 4078 \text{ \AA.-E.}$ (violett).

Vgl. Taf. I, Nr. 6 und Fig. 10. Belichtungszeit 5 Min.

$d\lambda_{\text{max.}} = 0,239 \text{ \AA.-E.}; \delta\lambda = 0,007 \text{ \AA.-E.}$

Die Komponenten sind:

+ 0,074 ($1/9$); + 0,049 ($1/4$); + 0,032 ($1/10$);

Hauptlinie (1); - 0,046 ($1/6$); - 0,076 ($1/6$).

Die schwache Komponente + 0,074 ist gerade noch links neben der starken + 0,049 wahrzunehmen. Von + 0,032 sieht man eigentlich nichts weiter als eine Art Abschattierung von + 0,049.

Mit der Quarzlampe erhielt ich die schwachen Linien + 0,032 und + 0,074 nicht mehr auf der Platte.

$\lambda = 4047 \text{ \AA.-E.}$ (violett).

Vgl. Taf. I, Nr. 7 und Fig. 11. Belichtungszeit 3 Min.

$d\lambda_{\text{max.}} = 0,235 \text{ \AA.-E.}; \delta\lambda = 0,007 \text{ \AA.-E.}$

Die Komponenten sind:

+ 0,067 ($1/2$); Hauptlinie (1); - 0,051 ($3/4$); - 0,111 ($1/3$).

Die Komponenten sind sämtlich unscharf. Es ist möglich, daß hier ein Übereinanderlagern verschiedener Satelliten stattfindet. Die Linie - 0,111 könnte auch als zur positiven

Seite der Hauptlinie gehörig angesehen werden; dann wäre $d\lambda = +0,124 \text{ \AA-E.}$ Hier macht sich die große Nähe der Spektra schon recht unangenehm bemerkbar.

Die Quarzlampe zeigte dasselbe wie die Lummersche Lampe.

Die Linien des Quecksilberfunkenpektrums in atmosphärischer Luft.

Zwei U-förmig gebogene Glasröhren mit Quecksilber dienten als Elektroden. Benutzt wurde ein großer Induktionsapparat¹⁾, dessen Maximalleistung 60 cm lange Funken sind, mit 70 Volt, 6—8 Amp. und Turbinenunterbrecher im Primärkreis. Der im Funken sich entwickelnde Quecksilberdampf wurde durch eine Wasserstrahlpumpe in einen über der Funkenstrecke angebrachten Trichter gesogen.

Da ich bei vielen Metallen durch Einschalten von Selbstinduktion und Parallelschalten von 6—10 großen Leidener Flaschen leidlich scharfe Linien erzeugen konnte, so versuchte ich dies auch hier zu erreichen, allein vergeblich. Keine einzige der oben zerlegten Linien konnte im Stufengitter als wirkliche Linie beobachtet werden. Dagegen trat ein anderer merkwürdiger Umstand auf. $\lambda = 5461, 4359, 4078, 4047$ wiesen nämlich ein ganz gleiches Aussehen auf: fünf äquidistante verwaschene Streifen auf ziemlich hellem Hintergrunde, d. h. dieselbe Erscheinung, die oben für die kleine Quarzlampe beschrieben ist (p. 49 und 51; vgl. auch Fig. 12 und 13). Diese Streifung zeigte sich bei den beiden gelben Linien in verschwindend geringem Maße, dagegen gut bei der grünen Linie $\lambda 5461$. Es war übrigens ganz gleichgültig, ob der Funke auf den Spalt projiziert wurde oder nicht, immer konnte man die Streifen in gleicher Weise sehen. Woher diese Streifen herrühren, konnte ich mir nicht erklären. Sie geben den Eindruck von Beugungsstreifen. Allein da die Linien des Funkens gleichzeitig mit denjenigen der Bogenlampen, die einen ganz verschiedenartigen Bau aufweisen, beobachtet und photographiert werden können, so ist es unmöglich, sie als Beugungs-

1) Von der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft gebaut.

streifen zu deuten. Merkwürdig bleibt besonders, daß die Streifen für alle Linien von der Zahl 5 nicht abweichen.

Vielleicht liegt hier etwas Ähnliches vor, wie es H. Kayser im zweiten Bande seines Handbuches der Spektroskopie p. 353 beschreibt: „Noch eine merkwürdige und unerklärte Erscheinung ist zum Aussehen der Linien zu erwähnen: auf einer Aufnahme des Bleispektrums, die aus dem Anfang der neunziger Jahre stammt, erhielt ich die Abschattierung einer sehr verbreiterten Bleilinie nicht kontinuierlich, sondern aufgelöst in eine Unzahl außerordentlich nahe liegender feiner Linien, die mir den Eindruck machten, als seien sie äquidistant. Ich habe damals leider die Abstände nicht gemessen, und seitdem ist die Platte verloren gegangen. Dieselbe Linie zeigte aber auf anderen Platten kontinuierliche Verbreiterung. Später sagte mir Rowland, daß er auf einer Platte und bei einer einzigen Linie dieselbe Beobachtung gemacht habe. Jewell teilt mit, daß auch einige Fraunhofersche Linien eine solche Auflösung der Abschattierung zeigen, namentlich *H* und *K*, daneben auch einige Eisenlinien, namentlich 3720. Später gibt Jewell an, daß bei einer Ca-Aufnahme des Bogenspektrums, wobei der Dampf besonders dicht war, die Schatten der Linien *H* und *K* dieselbe Struktur zeigten; er sagt indes hier, die Linien seien nicht äquidistant, sondern ihr Abstand wachse mit der Entfernung von der eigentlichen Linie.“

Die Linien des Quecksilberfunken im Geisslerrohr.

Gewöhnliches Geisslerrohr.

Es wurde ein Induktor¹⁾ mittlerer Größe (30 cm Funkenstrecke) mit 10 Volt, 2—3 Amp. und Deprezunterbrecher im Primärkreis benutzt.

In Röhren mit gerader Durchsicht konnten die im Bogen gefundenen Komponenten am besten gesehen werden, wenn die Kapillare senkrecht auf den Spalt gerichtet war. Durch den elektrischen Funken erwärmten sich allmählich die Röhren, der Gasdruck im Innern vergrößerte sich, und die Hauptlinie und die Satelliten kamen immer deutlicher zum Vorschein.

1) Gebaut von der Firma Reiniger, Gebbert und Schall in Erlangen.

So konnte ich von $\lambda 5790$ die Trabanten $-0,119$; $+0,132$; $+0,230$; von $\lambda 5769$ die Trabanten $-0,050$; $+0,046$ und sämtliche Trabanten von $\lambda 5461$ beobachten.

Neue Komponenten oder Änderungen ihrer Entfernungen habe ich nicht bemerkt. Hierbei wie auch bei den folgenden Röhren habe ich mich auf Okularbeobachtungen der beiden gelben und der grünen Linie beschränkt.

Quecksilberröhren nach Eder und Valenta.¹⁾

Die Form der Röhre geht aus Fig. 14 hervor. Sie wurden von der Firma F. O. R. Götze in Leipzig geliefert. Die Röhre enthält bei *c* einige Gramm Quecksilber. Der Teil zwischen *b* und *c* wird in einem Asbesthause erhitzt, so daß das Quecksilber durch die Kapillare nach dem weiteren Teil *ba* destilliert, während der Funke hindurchgeht. Die Röhre wurde nur in Längssicht benutzt.

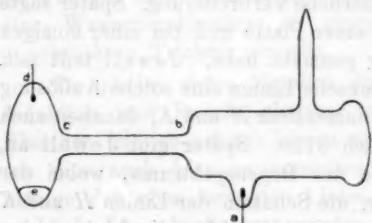


Fig. 14.

Die Elektroden *a* und *d* wurden mit der Sekundärwicklung eines Tesla-

transformators verbunden. Der Teil zwischen *b* und *c* wurde auf 130° – 150° erhitzt. Die Komponenten $+0,230$; $+0,132$; $+0,084$; $-0,119$ von $\lambda 5790$ erreichten bisweilen ein Drittel der Intensität der Hauptlinie. $\lambda 5769$ ließ die Trabanten wenig hervortreten. In $\lambda 5461$ erschien die Hauptlinie stets in der Weise umgekehrt, daß die Ränder als ganz schwache Linien übrig blieben; eine gleichzeitige Verbreiterung war mit der Umkehr nicht verbunden. Wäre die Linie doppelt, wie es im Quecksilberbogen auf den ersten Blick den Anschein hat, so hätten hier vier oder doch wenigstens drei solche schwache Linien vorhanden sein müssen. Die Intensität der Trabanten war hier eine ganz andere als im Bogen. Der Trabant $-0,232$ war der lichtstärkste; die übrigen Satelliten

1) J. M. Eder und E. Valenta, Wied. Ann. 55. p. 480. 1895; Beiträge zur Photochemie und Spektralanalyse p. 134. Fig. 26. 1904.

waren untereinander gleich stark, unterschieden sich aber von $-0,232$ nicht erheblich. Wurde die Temperatur weiter bis auf 250° erhöht, so nahm die Schärfe der Hauptlinie und der Trabanten schnell ab.

Die Umkehr der Hauptlinie von $\lambda 5461$ trat nur wenig deutlich auf, sobald ein gewöhnlicher Induktionsfunke hindurchgeschickt wurde. Auch die Komponenten zeigten sich nicht so deutlich. Vorteilhafter erwies sich der mittlere Induktionsapparat (p. 55), wenn ein nach Art des Wagnerschen Hammers konstruierter Quecksilberunterbrecher verwandt wurde. Geispeist wurde der Primärkreis von 7 Akkumulatoren (14 Volt), die einen Strom von ca. 9 Amp. lieferten. Hier wurde die im Bogen schwache Komponente $+0,084$ von $\lambda 5790$ öfter ebenso stark als der Nachbar $+0,132$. Wurde jetzt durch starke Flaschenentladung das zweite Linienspektrum des Quecksilbers erzeugt, so wiesen die Trabanten von $\lambda 5790$ bisweilen eine ganz ungemeine Steigerung der Intensität auf, so daß sie nur wenig der Hauptlinie nachstanden. Von $\lambda 5769$ war wenig zu erkennen. $\lambda 5461$ zeigte sehr oft die Hauptlinie in Umkehr und die Trabanten bald stärker, bald schwächer. Doch ließen sich alle diese Erscheinungen meist ein zweites Mal nicht willkürlich hervorrufen; der Intensitätswechsel trat ein und verschwand, ohne daß irgendwelche äußere Änderung vorgenommen worden wäre. Die zahlreichen sehr starken Linien des zweiten Quecksilberspektrums¹⁾ waren zu breit, als daß sie hätten im Stufengitter als Linien beobachtet werden können. Man sah nur eine breite gleichmäßige Helligkeit, aus der sich bisweilen eine schärfere Linie abzuheben schien.

Röhre mit Außenelektroden nach Hamy.

Die nähere Beschreibung dieser Röhren folgt später. Die Kapillare ist senkrecht auf den Spalt zu gerichtet. Das Quecksilber wurde im Vakuum in die Röhren hineindestilliert.

Bei einer Temperatur von 110° — 130° im Heizkasten

1) J. M. Eder u. E. Valenta, Denkschr. der Kaiserl. Akad. der Wiss. in Wien. 61. p. 401—430. 1894; Wied. Ann. 55. p. 479—502. 1895; Beiträge zur Photochemie und Spektralanalyse p. 132—150. 1904; J. Stark, Ann. d. Phys. 16. p. 490—515. 1905.

konnte man bei den gelben Linien die stärkeren Trabanten gut sehen. $\lambda 5461$ zeigte stets sämtliche fünf Satelliten und außerdem die Hauptlinie umgekehrt in Spindelform, d. h. die verbreiterte Mitte war umgekehrt, die beiden Teile liefen nach oben und unten in eine Spitze zusammen. Auch die Komponente $+0,088$ kehrte sich bisweilen um. Bei einer Temperatur von ca. 280° leuchtete die Röhre überhaupt nicht mehr; bei ca. 180° — 280° zeigten die beiden gelben Linien wieder die fünf äquidistanten Streifen (vgl. p. 49).

Vergleich der gewonnenen Ergebnisse mit den bisherigen Beobachtungen.

Im folgenden stelle ich die Resultate anderer Untersuchungen zusammen, soweit sie mir bekannt geworden sind. Michelsons Werte habe ich den Zeichnungen entnommen, die er von den verschiedenen Linien gegeben hat.¹⁾

$\lambda = 5790 \text{ \AA.-E. (gelb).}$

Michelson	Intensität	Fabry und Perot ²⁾	Intensität	Lummer ³⁾ und Gehrecke	Houstoun ⁴⁾	Intensität	Autor	Intensität
Hauptlinie	1			12 Linien			+0,230	$\frac{1}{7}$
0,12	$\frac{1}{5}$				+0,139 +0,139 +0,157	$\frac{2}{5}$	+0,168	$\frac{1}{10}$
0,13	$\frac{1}{10}$				+0,032 +0,035 +0,039	1	+0,132	$\frac{1}{7}$
0,24	$\frac{1}{10}$						+0,084	$\frac{1}{9}$
		Hauptlinie	1		Imaginäre Linie	0	Hauptlinie	1
		-0,131	schwach		-0,032 -0,031 -0,035	1	-0,119	$\frac{1}{5}$
					-0,072 -0,081 —	$\frac{2}{5}$	-0,187	$\frac{1}{10}$
					-0,203 -0,133 -0,180	$\frac{2}{5}$	-0,251	$\frac{1}{10}$

1) A. A. Michelson, Phil. Mag. (5) 34. 1892, Taf. VI, Fig. 14—17.

2) Ch. Fabry u. A. Perot, Ann. de chim. et phys. (7) 16. p. 115 bis 144. 1899.

3) O. Lummer u. E. Gehrecke, Ann. d. Phys. 10. p. 457—477. 1903. Nachtrag p. 477.

4) R. A. Houstoun, Phil. Mag. (6) 7. p. 456—467. 1904.

Die Michelsonsche Komponente 0,12 stimmt mit meiner Messung $-0,119$, 0,13 mit $+0,132$ und 0,24 mit $+0,230$ gut überein.

Fabry und Perot haben wahrscheinlich die stärkste Komponente messen wollen. Daß sie nicht die anderen starken Trabanten gesehen haben, rührt offenbar von der Art der verwendeten Lichtquelle — erhitztes Geisslerrohr — her, da sich hier $\lambda 5790$ mit allen Trabanten leicht verbreitert.

Mit der Zeichnung, die O. Lummer und E. Gehrecke von dieser Linie geben, stimmt meine Beobachtung ebenso wenig als mit der Anzahl der im Nachtrag angegebenen Linien. Während ich eine Linie finde, die an Intensität die übrigen beträchtlich überragt, sehe ich dort keine in derartig dominierender Stellung.

Ganz sonderbar sind die Angaben von Houstoun; seine Messungen wurden mit einem Okularmikrometer an einem Stufengitter ausgeführt, das aus 26 je 10,23 mm dicken Glasplatten bestand. Ich habe die Intensitätsangaben der von ihm gegebenen Zeichnung entnommen. Ist an sich schon die Messung mit dem Okularmikrometer unsicher, so müssen doch Abweichungen um $0,07 \text{ \AA.-E.}$ etwas groß genannt werden, falls sie nicht Veränderungen in den Komponenten anzeigen sollen. Er will, allerdings nur bei einer einzigen Gelegenheit, bemerkt haben, daß die äußerste, nach Violett zu gelegene Komponente sich weiter nach der Seite der kleineren Wellenlängen bewegte, als der Hammerunterbrecher die Schnelligkeit der Unterbrechungen änderte. Houstoun bezieht die Abstände der Komponenten auf eine imaginäre Linie zwischen den beiden stärksten Linien. Ich habe bei $\lambda 5790$ nur eine Hauptlinie gefunden und möchte daher die Vermutung aussprechen, daß die eine der stärksten Linien Houstouns die Hauptlinie von $\lambda 5769$ ist. Die beiden gelben Linien liegen sehr nahe beieinander; wenn sie nicht ganz scharf auf die Ebene des Spaltes 2 (vor dem

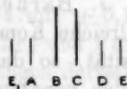


Fig. 15.

Eintritt in das Stufengitter, vgl. Fig. 1) fallen, können beide gleichzeitig in das Stufengitter eintreten, auch wenn der Spalt selbst so eng als möglich gestellt ist. Seine Lichtquelle ist das durch den Induktionsfunken zum Leuchten gebrachte Geissler-

rohr. Im Bogen — Quecksilber im hohlen Kohlenstab — beobachtet Houstoun eine „überraschende Umkehr“. Seine Zeichnung gebe ich in Fig. 15 wieder. E_1 ist E in der nächsten Ordnung. Gemessen wurde von der Mitte zwischen B und C aus:

A	B	C	D	E
-0,14	-0,05	+0,05	+0,16	+0,29

Die Entfernungen der Linien voneinander sind ziemlich gleich. Wahrscheinlich sind es dieselben fünf Streifen, die ich mittels der kleinen Quarzlampe, im Funken und in der Hamyröhre bei höherer Temperatur erhalten habe.

$$\lambda = 5769 \text{ \AA.-E. (gelb).}$$

Michelson	Intensität	Fabry und Perot ¹⁾	Intensität	Lummer ²⁾ und Gehrcke	Autor	Intensität
Hauptlinie 0,02	1 $\frac{1}{5}$	+ 0,048 Hauptlinie	sehr schwach 1	11 Linien	+0,120 +0,087 +0,046 Hauptlinie -0,050 -0,113	$\frac{1}{10}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{5}$ 1 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$

Die von Michelson angegebene Linie 0,02 fand ich nicht. Fabry und Perot beobachteten auch hier nur die stärkste der Komponenten. Die elf Linien von Lummer und Gehrcke konnte ich nicht verifizieren.

J. Barnes³⁾ findet: „Die beiden gelben Linien haben zahlreiche Komponenten, aber sie sind von sehr geringer Intensität, so daß übereinstimmende Resultate nicht gefunden werden konnten.“

1) Ch. Fabry u. A. Perot, l. c. p. 58.

2) O. Lummer u. E. Gehrcke, l. c. p. 58.

3) J. Barnes, *Astrophys. Journ.* 19. p. 190—211. 1904 und *Phil. Mag.* (6) 7. p. 485—503. 1904.

$\lambda = 5461 \text{ \AA. E. (hellgrün).}$

Michelson	Intensität	Fabry ¹⁾ u. Perot	Intensität	Barnes ²⁾	Intensität	Gray ³⁾ u. Stewart	Intensität	Hous- toun ⁴⁾	Intensität	Lummer und Gehrcke ⁵⁾	Autor	Intensität
Haupt- linie	1	+0,136 $\frac{1}{8}$				+0,067 $\frac{3}{8}$		+0,084 $\frac{3}{8}$		21	+0,133 $\frac{1}{8}$	
0,07	$\frac{1}{10}$	+0,082 $\frac{1}{4}$	+0,04 $\frac{1}{4}$			+0,082 $\frac{3}{8}$		+0,046 $\frac{3}{8}$		Linien	+0,088 $\frac{1}{8}$	
0,10	$\frac{1}{4}$	+0,008 $\frac{1}{8}$	+0,01 $\frac{1}{8}$									
0,13	$\frac{1}{10}$	Haupt- linie	1	Haupt- linie	1	Haupt- linie	1	Haupt- linie	1		Haupt- linie	1
		-0,052 $\frac{1}{8}$	-0,04 1	-0,059 $\frac{3}{8}$	-0,056 $\frac{3}{8}$						-0,066 $\frac{1}{8}$	
		-0,076 $\frac{1}{7}$	-0,09 $\frac{1}{4}$	-0,096 $\frac{3}{8}$	-0,106 $\frac{3}{8}$						-0,099 $\frac{1}{10}$	
		-0,224 $\frac{1}{8}$	-0,11 $\frac{3}{4}$	-0,208 $\frac{3}{8}$	-0,227 $\frac{3}{8}$						-0,232 $\frac{1}{8}$	

Die drei Trabanten Michelsons stimmen mit meinen Beobachtungen nahezu überein, wenn man sie $-0,066$, $+0,088$, $+0,133$ zuordnet; auch die Intensitätsangaben weisen dann eine gewisse Übereinstimmung auf.

Fabry und Perot haben die Komponente $+0,008$ nur im Michelsonrohr beobachtet. Trotz der Angabe, daß sie nur die Hälfte der Intensität der Hauptlinie habe, bin ich geneigt, sie für einen Teil der Umkehr der Hauptlinie zu halten; denn diese kehrt sich überaus leicht um. Die Zahlen sollen nur angenäherte Gültigkeit besitzen, insbesondere $-0,052$ und $-0,076$. Im Astrophys. Journ. 13. 1901, Taf. IX, Fig. 1 ist eine Photographie der Interferenzfrangen dieser grünen Linie gegeben. Man kann dort nur zwei Ringe neben dem Ringsystem der Hauptlinie sehen; einen stärkeren nach der inneren Seite, auf der die Komponenten größerer Wellenlänge liegen und einen schwächeren Ring außen. Nach Fabry und Perots Angaben fällt in diesen Ringsystemen $-0,224$ mit $+0,136$ zusammen. Es stoßen also im Apparat von Fabry und Perot zwei Ringe, d. h. zwei aufeinanderfolgende Ordnungen derselben

1) Mitgeteilt von P. Zeeman, Astrophys. Journ. 15. p. 218—222 1902.

2) J. Barnes, l. c.

3) A. Gray u. W. Stewart, Proc. Roy. Soc. 72. p. 16—21. 1904.

4) R. A. Houstoun, l. c.

5) O. Lummer u. E. Gehrcke, l. c. p. 58.

Linie noch viel näher aneinander als im Stufengitter. Da $-0,052$ und $-0,076$ nur angenäherte Werte darstellen sollen, ist die Übereinstimmung mit meinen Messungen und Intensitätsangaben sehr gut.

Das gleiche kann man nicht sagen von den Resultaten von Barnes, die nach der Fabry und Perotschen Methode gewonnen sind. „Die Resultate sind nach einer langen Reihe von Beobachtungen erzielt worden.“ Und trotz allem diese negative Übereinstimmung. Nimmt man $0,000(1)$ und $-0,040(1)$ als Umkehr der eigentlichen Hauptlinie, so ergibt sich $+0,06(\frac{1}{8})$, $+0,03(\frac{1}{16})$, $0,00(1)$, $-0,07(\frac{1}{8})$, $-0,09(\frac{3}{8})$. Wenn jetzt die Zahlen etwas besser zu sein scheinen, so fügt sich doch die Intensitätsangabe bei den Komponenten gar nicht. Vermutlich haben also Überlagerungen von Trabanten die Resultate gefälscht.

Die Beobachtungen von Gray und Stewart und von Houstoun sind an demselben Stufengitter mit Geissleröhren gemacht worden. Die Entfernung der Komponenten wurde mit Hilfe eines Okularmikrometers geschätzt. Die Übereinstimmung zwischen den beiden Messungen ist nicht beträchtlich. Sie soll es nach Houstoun auch gar nicht sein. Er will merkwürdige Änderungen in den Komponenten beobachtet haben. Bisweilen erschienen ihm die zwei Trabanten auf jeder Seite der Hauptlinie als je eine Linie, wobei aber diese eine Linie nicht die schlecht bestimmte Dopellinie sein soll. Er hat diese eine Linie auch gemessen und ihre Lage zu $-0,084$ und $+0,069$ gefunden. Dagegen muß ich bemerken, daß ich bei meinen sehr zahlreichen und langdauernden Beobachtungen solche Änderungen niemals in der Lage der Komponenten, sondern einzig und allein in ihrer Intensität wahrgenommen habe. Auch Fabry und Perot¹⁾ versichern wiederholt, niemals eine wirkliche Änderung der Wellenlänge der Hauptlinie und der Satelliten beobachtet, wohl aber merkliche Änderungen in den relativen Intensitäten von Haupt- und Nebenlinien konstatiert zu haben. So oft ich ein Geisslerrohr benutzte, mußte ich den Spalt Sp_2 (Fig. 1) wegen der Licht-

1) Ch. Fabry u. A. Perot, *Compt. rend.* 128. p. 1221—1223. 1899; *Journ. de phys.* (3) 9. p. 369—382. 1900.

schwäche der Linien ziemlich breit machen, um genügend Licht in das Gitter zu bekommen. Dann konnten kleine Verschiebungen des Linienbildes gegen den Spalt Sp_2 und ungenaue Okulareinstellung, hervorgerufen durch geringe, unmerkliche Erschütterungen des langen Tisches, auf dem das Stufengitter stand, Änderungen in der Zusammensetzung der Linien vortäuschen. Nichts anderes dürften auch die von Houstoun beobachteten Veränderungen darstellen.

Nicht unerwähnt mag bleiben, daß verschiedene Beobachter an demselben Stufengitter (21 Platten, je 1 cm hoch) eine verschiedene Anzahl von Linien bei $\lambda 5461$ gesehen haben. A. Hagenbach¹⁾ hat sechs Komponenten photographiert; O. Lummer und E. Gehrcke²⁾ haben dagegen zehn Trabanten bemerkt. Diese Zahl kann wohl nur durch Umkehrungen hervorgebracht sein. In solchen Umkehrungen dürfte sonach ein Teil der 21 Komponenten, die O. Lummer und E. Gehrcke mit ihrem Plattenspektroskop gefunden haben, seine Erklärung finden.

$$\lambda = 4359 \text{ \AA.-E. (indigo).}$$

Michelson	Intensität	Barnes ³⁾	Intensität	Lummer und Gehrcke ⁴⁾	Autor	Intensität
Hauptlinie 0,17	1 $\frac{1}{10}$				+0,121	$\frac{2}{3}$
		+ 0,04	$\frac{1}{4}$	sieben bez. vier Linien	+0,105	$\frac{2}{3}$
					+0,043	$\frac{1}{4}$
					+0,020	$\frac{1}{5}$
		Hauptlinie	1		Hauptlinie	1
		- 0,05	$\frac{1}{4}$		-0,023	1
					-0,052	$\frac{1}{7}$
					-0,097	$\frac{2}{3}$
					-0,112	$\frac{2}{3}$

Zum Vergleich füge ich noch die Resultate der Quarzlampe bei: +0,106 ($\frac{1}{3}$), +0,035 ($\frac{1}{4}$), 0,000 ($\frac{1}{2}$), -0,036 ($\frac{1}{4}$).

1) A. Hagenbach, Ann. d. Phys. 13. p. 362—374. 1904.

2) O. Lummer u. E. Gehrcke, Abhandl. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt 4. p. 61—84. 1904.

3) J. Barnes, l. c.

4) O. Lummer u. E. Gehrcke, l. c. p. 58.

—0,111 ($\frac{1}{9}$). Anstatt der äußeren Werte könnte es bei anderer Zuordnung dieser Komponenten auch heißen: —0,176 und +0,171. Dann würde die Michelsonsche Komponente eine dieser beiden sein.

Für die übrigen Linien liegen Messungen nicht vor, sondern nur Angaben über die Zahl der Komponenten.

Nach Lummer und Gehrcke besteht die dunkelgrüne, schwache Linie $\lambda 4916$ außer der Hauptlinie aus vier bez. drei Trabanten.¹⁾ Ich habe mit dem Stufengitter Trabanten weder sehen noch photographieren können. Auch die kleine Quarzlampe, die durch Ausschalten von Vorschaltwiderstand ein immer stärker werdendes Licht gibt, ließ Trabanten nicht hervortreten.

A. Hagenbach und H. Konen²⁾ haben mit einem großen Konkavgitter von 88000 Furchen Teile des Quecksilberbandenspektrums in der zweiten Ordnung photographiert und gleichzeitig auch einzelne Linien erhalten, die eine ganze Reihe von Komponenten aufwiesen. Danach besteht $\lambda 4348$ aus einer starken Linie mit zwei Trabanten auf jeder Seite; $\lambda 4339$ ist fünffach mit einer ähnlichen Anordnung der Trabanten.

Auch bei den beiden violetten Linien $\lambda 4078$ und $\lambda 4047$ herrscht keine Übereinstimmung zwischen den Angaben von Lummer und Gehrcke, Hagenbach und Konen und meinen Beobachtungen. Freilich macht sich hier beim Stufengitter die große Nähe der Spektra recht unliebsam bemerkbar, so daß Überlagerungen von Trabanten sehr wahrscheinlich sind.

	Lummer und Gehrcke ¹⁾	Hagenbach und Konen ²⁾	Autor
$\lambda 4348$	—	5 fach	4 fach
$\lambda 4339$	—	5 „	8 „
$\lambda 4078$	4 fach	7 „	6 „
$\lambda 4047$	5 „	7 „	4 „

A. Hagenbach und H. Konen haben die Linien $\lambda 4348$ und $\lambda 4047$ in 11,4facher Vergrößerung an der unten ge-

1) O. Lummer u. E. Gehrcke, l. c. p. 58.

2) A. Hagenbach u. H. Konen, Zeitsch. f. wiss. Photographie 1. p. 342—346. 1903.

nannten Stelle wiedergegeben. Von den Zusammensetzungen ist leider zu wenig zu sehen, als daß ein genauer Vergleich mit meinen Photographien möglich gewesen wäre. Die in Aussicht gestellten Resultate der Vermessung habe ich nirgends auffinden können. Fraglich scheint es mir, ob A. Hagenbach und H. Konen die von mir im Stufengitter erhaltenen Trabanten mit ihrem Gitter haben ermitteln können; jedenfalls müßten sie dann auch den größten Teil der Komponenten der beiden starken gelben und der hellgrünen Linie sehen können.

Die Kadmiumlinien.

Größere Bedeutung als die Quecksilberlinien haben die Kadmiumlinien erhalten, seit Michelson¹⁾ das Meter in Wellenlängen dieser Linien ausgedrückt hat. Auch hier weichen die Resultate ziemlich stark voneinander ab, jedoch nicht so sehr wie bei den Quecksilberlinien. Dies könnte man dem Umstand zuschreiben, daß sie noch nicht so häufig untersucht worden sind.

Kadmium im Funken gibt (auch mit Selbstinduktion bei sehr starker Flaschenentladung) kein genügend homogenes Licht, um die sehr dicht an der Hauptlinie liegenden Trabanten zu beobachten. Eine Kadmiumamalgamlampe²⁾ stand mir nicht zur Verfügung. Doch glaube ich nicht, daß sie besonders günstig ist, weil, wie man später sehen wird, die Hauptlinien von λ 5086, 4800 und 4678 sich leicht umkehren. Meine eigentlichen Beobachtungen erstrecken sich daher nur auf das Geisslerrohr, in welchem Kadmium zum Verdampfen gebracht wird.

Verwendete Lichtquelle.

Die Michelsonsche Kadmiumlampe wurde genau nach den Angaben Michelsons¹⁾ hergestellt. Fig. 16 stellt die Lampe im Querschnitt dar. Die Röhren wurden im Heizkasten auf einer Temperatur von ca. 350° gehalten. Als Induktorium benutzte ich das oben erwähnte mittlerer Größe

1) A. A. Michelson, l. c. p. 37. Vgl. auch Zeitschr. f. Instrumentenk. 22. p. 293—311. 1902.

2) O. Lummer u. E. Gehreke, Zeitschr. f. Instrumentenk. 24. p. 296 bis 298. 1904.

von 30 cm Schlagweite mit fünf Akkumulatoren (10 Volt) und Drepezuunterbrecher im Primärkreis.

Die Röhren wurden von F. O. R. Goetze-Leipzig geliefert. Sie erfreuten sich einer nur geringen Lebensdauer, da das Glas an den Einschmelzstellen der Platindrähte meist schon nach kurzem Gebrauch Risse bekam. Die von Fabry und Perot¹⁾ empfohlene Art der Lichterregung durch einen Gleichstrom von 700–800 Volt konnte ich nicht anwenden, weil die dazu nötigen 500 kleinen Akkumulatoren fehlten. Mit der Michelsonlampe habe ich nur Okularbeobachtungen gemacht.

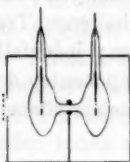


Fig. 16.

Hamy²⁾ empfahl, um den unangenehmen Eigenschaften der Michelsonröhren zu entgehen, statt Innenelektroden Außenelektroden. Würden diese durch Graphit in möglichst innige Berührung mit dem Glase der Röhre gebracht, so sei ein Durchschlagen des Funkens fast ausgeschlossen, besonders wenn man noch Kapazität in den Sekundärkreis des Induktoriums einschalte. Um eine hohe Leuchtkraft zu erhalten, wählte ich die Dimensionen ziemlich groß. Die weiteren Teile hatten eine Länge von ca. 7 cm und einen Durchmesser von 3 cm, die Kapillare eine Länge von 5 cm. Der Röhre suchte ich eine möglichst hohe Evakuierung zu geben. Dazu benutzte ich die von Dewar³⁾ entdeckte Eigenschaft der Holzkohle, bei der Temperatur der flüssigen Luft fast alle Gase in einem überaus hohen Maße zu absorbieren. Einige Kubikzentimeter ausgeglühter Kokosnußkohle wurden in das erweiterte Ende eines durch einen Hahn abschließbaren Seitenrohres gebracht. Die von der Kohle absorbierten Gase wurden unter fortwährendem Erwärmen ausgetrieben und der Hahn abgeschlossen. Darauf wurden die Spektralröhren, die chemisch reines Kadmium⁴⁾ enthielten, an die Pumpe angeschlossen und möglichst stark evakuiert. Um die an den Glaswänden haftenden Gase völlig loszulösen, erwärmte ich

1) A. Perot u. Ch. Fabry, l. c. p. 62.

2) M. Hamy, *Compt. rend.* 124. p. 749–752. 1897.

3) J. Dewar, *Compt. rend.* 139. p. 261–264. 1904.

4) Von Merck-Darmstadt bezogen.

die Spektralröhren in einem elektrischen Ofen unter fortwährendem Evakuieren auf etwa 450° . Dann wurde die Kohle in flüssige Luft getaucht, der Hahn geöffnet und nach etwa 15 Minuten die Röhre abgeschmolzen.¹⁾ Die flüssige Luft wurde mir in zuvorkommender Weise von Hrn. Privatdozenten Dr. Erdmann zur Verfügung gestellt.

Ein ca. 3,5 cm langes Messingrohr, die Außenelektrode, wurde über die weiten Teile der Röhre geschoben, der Zwischenraum zwischen Glas und Messing mit fein pulverisiertem Graphit verstopft, und die Enden mit zerriebenem Asbest ver kittet, um das Herausfallen des Graphits zu verhindern. Der Heizkasten aus starkem Eisenblech war 30 cm lang, je 11 cm hoch und breit. Seine Form und die Art der

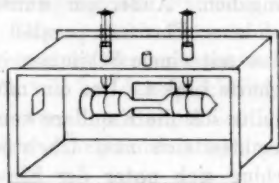


Fig. 17.

Aufhängung der Röhren ist aus Fig. 17 ersichtlich. Die Fenster sind so angebracht, daß man die Kapillare senkrecht und quer zum Spalt stellen kann. Der Messingmuff besitzt in der Mitte eine Rille; um diese wurde ein Messingdraht geschlungen und, durch Glas- und Porzellanröhrchen isoliert, nach außen geführt. Kleine Klemmschrauben faßten am Ende dieser Glasröhrchen die Messingdrähte und hielten die Spektralröhren in der gewünschten Höhe. Durch eine dritte Öffnung auf der Oberseite des Heizkastens wurde ein Thermometer eingeführt. Drei Bunsenbrenner sorgten für eine Temperatur von 350° im Innern des Heizkastens. Das Ganze wurde von einem Gehäuse aus starker Asbestpappe umgeben; durch Glimmerblättchen trat das Licht aus. Um durch die starke Wärmestrahlung das Kollimatorrohr nicht zu gefährden, wurde noch eine Glasscheibe zwischen den Spalt Sp_1 und das Asbesthaus gestellt und diese bis auf die Öffnung zur Durchsicht mit Asbestpapier bedeckt. Eine Linse projizierte das Licht auf den Spalt.

Es wäre eigentlich nicht nötig gewesen, die Dimensionen

1) Ein Silber- und Goldschaumrohr wehrte den Quecksilberdämpfen erfolgreich den Eintritt in die Spektralröhren.

des Heizkastens so groß zu nehmen, da ein Überspringen des Induktionsfunken nach den Wänden ausgeschlossen ist, besonders wenn man zur Vorsicht eine Funkenstrecke der Röhre parallel schaltet. Auch die Länge der Kapillare könnte auf den fünften Teil herabgesetzt werden. Ich hatte sie so lang gewählt, weil ursprünglich die Röhre im Kasten an der Kapillare befestigt werden sollte.

Bezüglich des Induktoriums gelten die p. 66 gemachten Angaben. Außerdem wurden dem Sekundärkreis zwei große Leidener Flaschen parallel geschaltet. Die Röhren leuchteten blau mit einem Schimmer ins Rote und gaben sehr starke und scharfe Linien. Um ein möglichst intensives Licht zu erhalten, stellte ich die Kapillare senkrecht zum Spalt. Sehr bald aber machten sich zwei Übelstände bemerkbar. An der Kathode schlug sich unter der Einwirkung des Funkens Kadmium in Form von kleinen Tröpfchen nieder, an der Anode löste sich Natrium aus dem Glase.¹⁾ Der Natriumdampf nahm schnell — schon nach einstündigem Gebrauch — so zu, daß er nicht nur den Kadmiumdampf verdrängte, sondern auch das Glas gelb bis rotbraun färbte. Auch Hamy hat die *D*-Linien in seinen Röhren gefunden; allein sie sind offenbar nicht störend aufgetreten wie in meinen Röhren. Jenaer Glas 16^m besserte nichts. Röhren aus alkalifreiem Glase waren nicht haltbar genug. Weitere Versuche an anderen Gläsern habe ich nicht angestellt.

Diesen Übelständen konnte ich in der Weise begegnen, daß ich als Anode die von dem Spalt weiter abgelegene Elektrode wählte; durch vorsichtiges Regulieren des Deprezunterbrechers wurde der hier sich bildende Natriumdampf an zu starkem Auftreten und weiterer Ausbreitung gehindert. In die Röhren selbst brachte ich eine nur geringe Menge Kadmium, damit sich nicht an der Durchsichtsstelle allzuviel niederschlagen konnte; nach längerem Gebrauch wurden die Metalltröpfchen durch Erwärmen mit dem Bunsenbrenner vertrieben. Durch längeres Exponieren erhielt ich die Komponenten auf der Platte.

Taf. I, Nr. 8—13 stellt drei Kadmiumlinien dar. Nr. 8,

1) Es war Gehlberger Glas.

10, 12 gibt die wahre Beschaffenheit der betreffenden Linien; die Kapillare stand quer zum Spalt. Nr. 9, 11, 13 zeigt dieselben Linien bei Längssicht. Die Hauptlinie ist hier umgekehrt. Bei den Aufnahmen Nr. 8—13 hatten die beiden Spalte des Stufengitters genau die nämliche Breite. Der Innendurchmesser der Kapillaren der verwendeten Spektrallröhre betrug 1,5 mm. Eine Kapillare von 0,5 mm Durchmesser zeigte in Quersicht die Trabanten deutlicher, aber die enge Kapillare setzte dem Durchgang des Funkens so viel Widerstand entgegen, daß der Deprezunterbrecher in der nötigen vorsichtigen Weise nicht gebraucht werden konnte.

Die Photogramme sind sämtlich wie bei den Quecksilberlinien so wiedergegeben, daß links von den Hauptlinien die Trabanten größerer, rechts von den Hauptlinien diejenigen kleinerer Wellenlänge liegen.

Die Zusammensetzung der Kadmiumlinien.

$$\lambda = 6439 \text{ \AA.-E. (rot).}$$

Diese schöne rote Linie habe ich stets einfach erhalten. Auch Michelson, Fabry und Perot, und Hamy finden sie einfach. Barnes¹⁾ will eine Komponente — 0,01 Å.-E. ($\frac{1}{6}$) beobachtet haben. Eine Komponente in solcher Nähe der Hauptlinie gibt das Stufengitter nicht getrennt, wenigstens nicht im roten Teile des Spektrums. Nach Lummer und Gehrcke²⁾ besitzt diese Linie drei deutlich erkennbare Trabanten. Wenn „die Größenordnung der Wellenlängendifferenz dieser Trabanten gegen die Hauptlinie größer ist als $\frac{1}{100000}$ der Wellenlänge“, wie Lummer und Gehrcke angeben, so hätte ich die Komponenten im Stufengitter sehen müssen.

$$\lambda = 6325 \text{ \AA.-E. (rot).}$$

In der Röhre mit Außenelektroden ist diese schwache Linie doppelt, der Trabant viel schwächer als die Hauptlinie; in der Michelsonröhre ist sie nicht vorhanden. Da die Linie an sich schwach ist, habe ich sie nicht photographiert. Hamy³⁾ findet dasselbe Resultat.

1) J. Barnes, l. c.

2) O. Lummer u. E. Gehrcke, l. c. p. 58.

3) M. Hamy, Compt. rend. 130. p. 489—492. 1900.

$$\lambda = 5155 \text{ \AA.-E. (grün).}$$

Diese Linie ist sehr scharf, einfach und fast ebenso stark als λ 6439 und λ 5086. Nach Hamy¹⁾ ist sie ebenfalls einfach.

$$\lambda = 5086 \text{ \AA.-E. (grün).}$$

Vergl. Taf. I, Nr. 8 und 9 und Fig. 18. Belichtungszeit 15, bez. 10 Min. $d\lambda_{\text{max.}} = 0,405 \text{ \AA.-E.}$; $\delta\lambda = 0,012 \text{ \AA.-E.}$
Die Komponenten sind:

$$+ 0,076 \text{ (1/8)}; \text{Hauptlinie (1)}; - 0,026 \text{ (1/8)}.$$

In Taf. I, Nr. 8 und 9 ist die nämliche Linie λ 5086 dargestellt, wie sie die Röhre mit Außenelektroden gibt, Nr. 8 bei Quersicht, Nr. 9 bei Längssicht. Genau dasselbe Aussehen wie Nr. 8 gab die Michelsonlampe. Wenn man die Hauptlinie in der Ordnung auf der linken Seite betrachtet, so bemerkt man leicht, daß sie nach links scharf abgeschnitten ist, nach rechts dagegen verbreitert erscheint. Dies tritt besonders

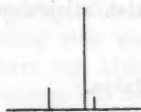


Fig. 18.

deutlich hervor, wenn man auf die Lage der Spitzen der Linie achtet. Die Verbreiterung stellt die Komponente $-0,026$ dar. Die Komponente $+0,076$ ist links von den Hauptlinien in beiden Ordnungen gut sichtbar. In Taf. I, Nr. 9 erscheint die Hauptlinie nie anders als umgekehrt erhalten.²⁾ Ohne weiteres sieht man es den Linien gar nicht an, daß das Doublet eine Umkehr ist, zumal der rechte Teil eine Verbreiterung nach der rechten Seite, eben die Komponente $-0,026$, hat. Die drei Linien in Nr. 9 haben ungefähr die gleiche Intensität. Die isolierte und sehr scharfe Komponente $+0,076$ hat Hamy¹⁾ relativ zu $\lambda = 6438,472 \text{ \AA.-E.}$ gemessen und als Wellenlänge 5085,903 gefunden. Michelson hat bei der Meterbestimmung für die stärkste Linie der Gruppe λ 5086 den Wert 5085,8240 gewonnen. Die Differenz ist 0,079; sie steht in ziemlich naher Übereinstimmung mit meiner Messung. Hamy hat offenbar die Umkehr der Hauptlinie in

1) M. Hamy, l. c. p. 69.

2) Vgl. dagegen p. 71.

seiner Lampe für zwei wirkliche Linien gehalten, denn er sagt¹⁾, daß λ 5086 aus einer einzelnen Linie und einer an Intensität gleichen Doppellinie bestehe.

Nach A. Michelson²⁾ besitzt λ 5086 einen Trabanten 0,022 ($\frac{1}{4}$). Ch. Fabry und A. Perot³⁾ bestimmen diesen Trabanten zu $-0,025$ Å.-E. Sie konnten dagegen in der Michelsonlampe eine Komponente größerer Wellenlänge nicht finden, auch wenn sie die Art der Lichterregung variierten.⁴⁾ Ich habe den Trabanten $+0,076$ in allen meinen Michelsonröhren — sieben an Zahl — beobachtet. Ch. Fabry⁵⁾ hat sodann das von der Hamyschen Röhre ausgesandte Licht mit der Michelsonlampe verglichen. Nur wenn die letztere so stark als irgend möglich evakuiert worden war, konnte er eine Spur von $d\lambda = +0,076$ entdecken. Anwesenheit von Luft schwächt die Trabanten nach den Feststellungen von Hamy.¹⁾ Deshalb nahm Fabry⁵⁾ eine Michelsonröhre, deren Elektroden aus einer Kadmiumlegierung bestanden. Die Röhre blieb an die Luftpumpe angeschlossen, so daß die Evakuierung während der Beobachtung fortgesetzt werden konnte. „Hier zeigte die Linie λ 5086 das Triplet von Hamy mit den untereinander gleichen Intensitäten der Linien.“ Die Entfernung dieser drei Linien voneinander bestimmte Fabry zu $+0,076$ und $-0,024$ Å.-E., wenn von der mittleren Linie aus gezählt wird.

Ich habe in der elektrodenlosen Röhre auch bei Anwesenheit von Luft $d\lambda = +0,076$ sehr deutlich gesehen, die Linien waren sämtlich schwächer als in der Michelsonröhre. Merkwürdigerweise war jedoch die Hauptlinie nicht umgekehrt, trotzdem die Kapillare senkrecht zum Spalt gerichtet war.

Nach O. Lummer und E. Gehrcke⁶⁾ läßt λ 5086 zwei Trabanten erkennen.

J. Barnes⁷⁾ findet: $+0,04$ ($\frac{1}{4}$); $+0,025$ ($\frac{1}{4}$); $+0,01$ ($\frac{1}{8}$);

1) M. Hamy, l. c. p. 69.

2) A. A. Michelson, l. c. p. 36.

3) Ch. Fabry u. A. Perot, Compt. rend. 126. p. 407—410. 1898.

4) Ch. Fabry u. A. Perot, Compt. rend. 130. p. 653—655. 1900.

5) Ch. Fabry, Compt. rend. 138. p. 854—856. 1904. Auch in Astrophys. Journ. 19. p. 116—118. 1904.

6) O. Lummer u. E. Gehrcke, l. c. p. 58.

7) J. Barnes, l. c.

Hauptlinie (1). Auch hier ist eine Übereinstimmung mit den anderen Beobachtungen nicht vorhanden.

$$\lambda = 4800 \text{ \AA.-E. (hellblau).}$$

Vgl. Taf. I, Nr. 10 und 11; Fig. 19. Belichtungsdauer 20 bez. 10 Min. $d\lambda_{\text{max.}} = 0,354 \text{ \AA.-E.}$; $\delta\lambda = 0,011 \text{ \AA.-E.}$

Die Komponenten sind:

$$+0,059 (1/4); \text{ Hauptlinie (1); } -0,034 (1/6); -0,080 (1/5).$$

Nr. 10 gibt eine Aufnahme der Linie bei Quersicht; genau so erscheint die Linie auch in der Michelsonlampe.

Nr. 11 gibt das Aussehen der Linie bei Längssicht. Die Hauptlinie ist umgekehrt, und zwar überlagert der eine Teil die Komponente $-0,034$, so daß man hier vier Linien, immer eine starke auf eine etwas schwächere folgend, vor sich hat. Deutlicher trat dies erst auf einer Photographie

hervor, bei der die Linien in einer Ordnung aufgenommen worden waren. Auch hier erkennt man die Umkehr nicht eher, als bis man weiß, daß Nr. 10 dieselbe Linie darstellt, wie Nr. 11.

A. Michelson¹⁾ findet eine Komponente $0,07 (1/10)$.

Nach Ch. Fabry und A. Perot²⁾ liegt auf jeder Seite der Hauptlinie, in gleicher Entfernung von ihr, ein Trabant: $\pm 0,082$.

M. Hamy³⁾ findet in seiner Röhre die Linie vierfach.

O. Lummer und E. Gehrcke⁴⁾ sehen drei Trabanten.

J. Barnes⁵⁾ gibt an: $+0,06 (1/3)$; Hauptlinie (1); $-0,04 (1/4)$.

$$\lambda = 4678 \text{ \AA.-E. (dunkelblau).}$$

Vgl. Taf. I, Nr. 12 und 13; Fig. 20. Belichtungszeit 15 bez. 10 Min.

$$d\lambda_{\text{max.}} = 0,334 \text{ \AA.-E.}; \delta\lambda = 0,010 \text{ \AA.-E.}$$

Die Komponenten sind:

$$+0,030 (1/3); \text{ Hauptlinie (1); } -0,056 (1/6).$$

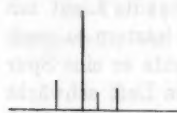


Fig. 19.

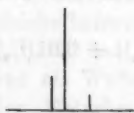


Fig. 20.

1) A. A. Michelson, l. c. p. 36.

2) Ch. Fabry u. A. Perot, Comp. rend. 126. p. 407—410. 1898.

3) M. Hamy, l. c. p. 69.

4) O. Lummer u. E. Gehrcke, l. c. p. 58.

5) J. Barnes, l. c.

Auch hier tritt Ähnliches auf wie bei $\lambda 4800$. In Nr. 13 ist die Hauptlinie umgekehrt, der eine Teil der umgekehrten Linie überlagert + 0,030. In Nr. 12 stand die Kapillare quer zum Spalt, in Nr. 13 senkrecht.

Nach Hamy¹⁾ ist die Linie doppelt.

$$\lambda = 4662 \text{ \AA.-E. (dunkelblau).}$$

Diese mäßig starke Linie habe ich übereinstimmend mit Hamy¹⁾ einfach gefunden.

Die Linien $\lambda 6325$, 5155 und 4662 fehlen in der Michelsonlampe. Schaltet man jedoch einen Kondensator und eine Funkenstrecke ein, so gibt auch die Michelsonlampe dieselben Linien wie die Röhre mit Außenelektroden.

Über die Linien des Kadmiums in einer Kadmiumamalgamlampe sagen O. Lummer und E. Gehrecke²⁾ folgendes: „Bei Beobachtung in unserem Interferenzspektroskop, mit einer planparallelen Platte von 0,5 cm Dicke und 20 cm Länge, waren die Quecksilberlinien, entsprechend dem hohen Dampfdruck im Innern der Lampe, verwaschener als in der von einem von uns angegebenen Lampenkonstruktion.³⁾ Auch die Trabanten der Linien kommen, zumal bei starker Kühlung, in letzterer prägnanter zur Ausbildung. Die Kadmiumlinien zeigten, obwohl sie sämtlich Trabanten besaßen, eine einfachere Struktur als die Quecksilberlinien. Die Linien 5086 und 4800 hatten je 5 Trabanten, während die rote Linie 6438 in Übereinstimmung mit den Resultaten Michelsons die einfachste Struktur besaß, aber immerhin einen unsymmetrischen, zusammengesetzten (dreifachen) Bau zeigte. Die Trabanten der Kadmiumlinien bilden jedoch kein so konstantes Phänomen wie diejenigen der Quecksilberlinien; je nach den Bewegungen und Variationen des Lichtbogens treten sie mit verschiedener Intensität und an verschiedenen Stellen des Interferenzspektrums hervor. Bei manchen, zufällig für kurze Zeit sich einstellenden Brennbedingungen der Lampe ließ sowohl die Linie 6438 als

1) M. Hamy, l. c.

2) O. Lummer u. E. Gehrecke, Zeitschr. f. Instrumentenk. 24. p. 296—298. 1904.

3) O. Lummer, Zeitschr. f. Instrumentenk. 21. p. 201. 1901.

auch 5086 gar keine Trabanten erkennen; hierbei war die Lichtstärke keineswegs gering.“

Die Linien $\lambda 5086$ und 4800 sind leicht umkehrbar, $\lambda 6438$ nicht. Ob die von O. Lummer und E. Gehrecke berichteten Variationen in den Trabanten auf solche Umkehrungen zurückzuführen sind, kann ich nicht entscheiden. Die von mir beobachteten Satelliten dürften kaum in der Kadmiumamalgamlampe sichtbar sein, da ihre Entfernungen von den Hauptlinien klein sind und diese Neigung zur Verbreiterung zeigen.

Das Licht der elektrodenlosen Kadmiumröhre wurde auch in der zweiten Ordnung eines Rowlandschen Gitters beobachtet. Das Konkavgitter war $4,4$ cm breit; es hatte pro engl. Zoll 14438 Furchen und einen Krümmungsradius von $1,568$ m. In der zweiten Ordnung löste es die Heliumlinie $\lambda 5876$ sehr deutlich in ihre Komponenten auf. Die Kadmiumlinien zeigten hier keine Spur eines Trabanten. Daher ist die von mir gewählte Zuordnung der Komponenten richtig. Hätte bei den Kadmiumlinien das p der Formel (2) p. 40 einen von Null verschiedenen Wert, so hätten sich diese Komponenten im Gitterspektrum zeigen müssen, da doch die auflösende Kraft hinreichte, um die Heliumlinien zu trennen.

Einige weitere Beobachtungen.

Die D -Linien.

In den Kadmiumröhren mit Außenelektroden löste sich unter dem Einflusse der hohen Temperatur und des Induktionsfunktens Natrium aus dem Glase. Zieht man den Deprezunterbrecher scharf an, so nehmen die Linien und Trabanten eine große Stärke an. Gleichzeitig aber wird der Natriumdampf in der Anode immer stärker, er verdrängt den Kadmiumdampf und diffundiert langsam durch die Kapillare nach der Kathodenseite.

Die Kapillare wurde quer zum Spalt gestellt. Durch eine Linse konnte ein beliebiger Teil der nunmehr im schönsten Gelb erstrahlenden Lampe auf den Spalt projiziert werden.

Im weiteren Teile der Röhre waren die beiden gelben Natriumlinien — es konnten im Stufengitter beide D -Linien gleichzeitig beobachtet werden — umgekehrt; die beiden Teile

der umgekehrten Linien waren durch einen ziemlich großen Zwischenraum getrennt und behielten eine konstante Lage, wie auch die Entladungen gesteigert oder geschwächt wurden. Dies war in der 1,5 mm starken Kapillare nicht der Fall. Hatte ich durch schärfere Entladungen Natriumdampf in die Kapillare gebracht, so konnte ich, wenn ich nach kurzer Ruhepause schwache Entladungen hindurchschickte, beide Natriumlinien als scharfe, durchaus einfache Linien erhalten. Wurde die Heftigkeit der Entladungen allmählich gesteigert, so zeigte sich ein schwacher dunkler Strich in der Mitte, der immer breiter wurde. So konnte man die beiden Teile immer weiter auseinanderreiben; mit schwächeren Entladungen rückten die beiden Teile wieder näher aneinander. Bemerkenswert bleibt, daß die Umkehr bei Quersicht schnell und leicht eintrat, daß also die emittierenden und absorbierenden Schichten in den engen Raum der 1,5 mm weiten Kapillare sich teilen mußten.

Unzweifelhaft sind die *D*-Linien also *einfach*. Nach Michelson¹⁾ dagegen besteht eine jede aus zwei starken Linien, die wieder von einer sehr schwachen Linie begleitet sind. Er gibt an, daß die Resultate mit metallischem Natrium in erhitztem Vakuumrohr voneinander so abweichend, der Charakter der Linien mit veränderter Temperatur und verändertem Druck so verschieden war, daß eine vollständige Untersuchung ihm unmöglich schien. Die Veränderungen rührten offenbar von der leichten Umkehrbarkeit der Natriumlinien her.

Auch Fabry und Perot²⁾ gelangten zu denselben Resultaten, wie ich sie erhalten habe. Sie wendeten eine Natriumsilberlegierung in ihrem Trembleur an und konnten durch Änderung der Stromstärke Änderungen in den Entfernungen der beiden Teile der umgekehrten Linien herbeiführen.

Die Zinklinien.

Zink gab in einer Röhre mit Außenelektroden bei einer Temperatur von ca. 460° ein sehr schönes Spektrum. Die Röhre selbst leuchtete bläulichrosa. Die Weite der Kapillare

1) A. A. Michelson, l. c. p. 86.

2) Ch. Fabry u. A. Perot, Compt. rend. 130. p. 658—655. 1900.

betrug 0,3 mm. Die Linien habe ich nicht photographiert, sondern nur beobachtet und sie sämtlich durchaus scharf und einfach gefunden. Sollten Trabanten vorhanden sein, so können sie nur eine verschwindend geringe Intensität haben. Außer sehr schwachen Linien treten auf: eine rote Linie $\lambda 6362$, die an Schärfe und Stärke die rote Kadmiumlinie fast überragt, sodann $\lambda 5182$, $\lambda 4810$, $\lambda 4722$, $\lambda 4680$, die auch stark und scharf waren, und die etwas schwächere $\lambda 4630$.

Nach A. Michelson¹⁾ ist die rote Linie $\lambda 6362$ einfach; $\lambda 4810$ hat eine sehr schwache Komponente 0,1.

Ch. Fabry und A. Perot²⁾ haben die Zinklinien relativ zur roten Kadmiumlinie gemessen, aber von Satelliten erwähnen sie nichts. Sie erzeugten das Zinkspektrum mit ihrem Trembleur.

M. Hamy³⁾ findet die Linien sämtlich einfach. $\lambda 4810$, 4722 und 4680 ist bisweilen umgekehrt — ich habe nur $\lambda 4810$ umgekehrt gesehen —, $\lambda 4722$ zeigt bisweilen eine Unsymmetrie bei der Umkehr.

R. A. Houstoun⁴⁾ endlich hat $\lambda 6362$, 4812 , 4722 , 4681 im Bogen beobachtet und verschiedene Umkehrungen erhalten. Durch geringe Mengen Zink in der Kohle glaubte er die Linien ohne Umkehr erhalten zu haben. Nach seinen Angaben ist $\lambda 6362$ einfach, $\lambda 4812$, 4722 , 4681 sind Doppellinien, die Komponenten von gleicher Intensität. Die Doppellinien sind aber offenbar nichts anderes als Umkehrungen.

Die Thalliumlinie.

Die Hamysche Röhre mit metallischem Thallium wurde im Heizkasten auf ca. 450° — 460° erhitzt. Ich erhielt außer der Thalliumlinie $\lambda 5351$ noch eine Reihe von anderen Linien, da das verwendete Metall nicht chemisch rein war. Die Thalliumlinie trat nicht stark hervor, aber ihre Intensität genügte, um im Stufengitter außer der Hauptlinie noch eine Komponente größerer Wellenlänge zu sehen, die etwa die halbe Intensität der Hauptlinie hatte.

1) A. A. Michelson, l. c. p. 36.

2) Ch. Fabry u. A. Perot, *Compt. rend.* 130. p. 492—495. 1900.

3) M. Hamy, *Compt. rend.* 138. p. 959—961. 1904.

4) R. A. Houstoun, l. c.

Es beobachteten:

A. Michelson¹⁾: $0,13(\frac{1}{10})$; $0,12(\frac{1}{2})$; $0,02(\frac{1}{5})$; Hauptlinie(1).

Ch. Fabry und A. Perot²⁾: $+0,114$; $+0,020$; Hauptlinie.

J. Barnes³⁾: $+0,10(\frac{3}{4})$; $+0,04(\frac{1}{4})$; Hauptlinie (1).

Michelson und Fabry und Perot haben Thalliumchlorür im Geisslerrohr verwendet.

Thalliumsalz, auf Platin in den Bunsenbrenner eingeführt, läßt nur in den ersten Sekunden nach Einführung von frischem Salz deutlich zwei Linien erkennen, dann fließen die beiden Linien zusammen.

Blei, Zinn und Schwefel geben auch bei ca. 460° im Vakuum nicht genügend Dampf, obwohl ihre Schmelzpunkte beträchtlich tiefer liegen.

Die Wasserstofflinien.

Die rote Wasserstofflinie $\lambda 6563$ zeigt sich im Stufengitter doppelt. Michelson¹⁾ hat die Entfernung der beiden Komponenten zu $0,14 \text{ \AA-E.}$ bestimmt. Photographiert und gemessen habe ich die Linie nicht. Nach meiner Schätzung ist jedoch $0,14$ richtig gewählt. Die Linien sind beide sehr unscharf, so daß sie gerade noch als getrennte Linien wahrgenommen werden können; dies dürfte der Grund sein, weshalb $\lambda 6563$ auch in einem großen Rowlandschen Gitter nicht doppelt zu sehen ist. Einige der mir zur Verfügung stehenden Geisslerrohren waren auch in Längssicht zu verwenden. Der Druck in den Röhren war 6 mm. Dann gab eine Röhre drei Linien: jede der beiden Komponenten war umgekehrt, die inneren Teile überlagerten sich; eine zweite Röhre ließ 4 Linien sehen: Eine Überlagerung und Verbreiterung hatte nicht stattgefunden. Das Michelsonsche Resultat bestätigten Blythwood und Allen⁴⁾ mit dem Stufengitter.

Schon bevor Michelson die oben erwähnte Bestimmung der Entfernung der beiden Komponenten ausgeführt hatte, hatte

1) A. A. Michelson, l. c. p. 36.

2) Ch. Fabry u. A. Perot, Compt. rend. 126. p. 407—410. 1893.
u. Ann. de chim. et phys. 16. p. 115—144. 1899.

3) J. Barnes, l. c.

4) Lord Blythwood u. H. S. Allen, Nature (Lonl.). 65. p. 79. 1901.

H. Ebert¹⁾ die Doppelheit der roten Wasserstofflinie durch Interferenzversuche erkannt und eine Entfernung von $0,132 \text{ \AA}$.-E. gleich $\frac{1}{46}$ der Entfernung der *D*-Linien gefunden, sich aber durch eine frühere irrtümliche Angabe von A. Michelson und E. Morley²⁾, daß die Entfernung der Komponenten $\frac{1}{60}$ der Entfernung der *D*-Linien sei, verleiten lassen, die beobachtete Interferenzerscheinung in einer besonderen Helligkeitsverteilung der Linie selbst zu suchen. Das Ebertsche Resultat wurde von C. Pulfrich³⁾ bestätigt.

Barnes⁴⁾ will zwei Trabanten sehen:

$$+0,06 (\frac{1}{4}); +0,02 (\frac{1}{8}); \text{Hauptlinie } (1).$$

Houstoun⁵⁾ bestimmt die Entfernung der beiden Komponenten zu $0,065$. Das ist etwa der halbe Wert von Michelson. Wäre dieser Wert richtig, so würde er zeigen, daß die verschiedenen Beobachter nur Umkehrungen der Linie $\lambda 6563$ gesehen haben. Dann hätte ich aber bei Längssicht eine dreifache Selbstumkehr im Geisslerrohr vor mir gehabt — eine etwas unwahrscheinliche Annahme.

Zusammenstellung.

1. Sämtliche starken Linien des Quecksilbers außer $\lambda 4916$ sind äußerst zusammengesetzt. Jede der „Linien“ wird im Stufengitter in ein nicht gerade an Linien armes Spektrum zerlegt. Die Linien des Kadmiums erweisen sich nur zum Teil als zusammengesetzt. Als einfach zeigen sich die *D*- und Zinklinien. Die rote Wasserstofflinie ist doppelt.

2. Änderungen in der Wellenlänge der Satelliten habe ich nie beobachtet, dagegen öfter in den relativen Intensitäten der Komponenten. Dies Resultat ist insofern bemerkenswert, als solche Änderungen bei nicht genügend auflösenden Apparaten Verschiebungen von Linien vortäuschen können.

1) H. Ebert, Wied. Ann. **43**. p. 790—807. 1891.

2) A. A. Michelson u. E. W. Morley, Phil. Mag. (5) **24**. p. 463—466. 1887.

3) C. Pulfrich, Zeitschr. f. Instrumentenk. **13**. p. 410. 1893.

4) J. Barnes, l. c.

5) R. A. Houstoun, l. c.

3. „Geister“ dürften in den von mir mitgeteilten Beobachtungen ausgeschlossen sein. Wenn auch die Übereinstimmung meiner Messungen mit anderen nicht groß ist, so sprechen doch gewichtige Gründe für ein Fehlen der Geister. In allen Teilen des Spektrums zeigte das benutzte Stufengitter verschiedene starke Linie als durchaus einfach, während O. Lummer und E. Gehrcke mit ihrem Plattenspektroskop keine Linie einfach finden. Ein weiterer Beweis ergibt sich aus der ganz verschiedenartigen Struktur der nahe beieinander liegenden gelben Linien $\lambda 5790$, $\lambda 5769$ (Quecksilber); $\lambda 5896$, $\lambda 5890$ (Natrium) und $\lambda 5876$ (Helium); dazu kommt noch die gute Übereinstimmung der Messung für die gelbe Heliumlinie mit der von Runge und Paschen, die an einem großen Rowlandschen Gitter geschehen war.

4. Je größer die auflösende Kraft eines Spektroskops ist, um so leichter kann eine etwaige Selbstumkehr der Linien beobachtet werden, die als solche zu erkennen bisweilen kaum möglich ist.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, Hrn. Prof. Dr. E. Dorn für die freundliche Anregung zu dieser Arbeit und für das mir stets bewiesene gütige Entgegenkommen meinen ergebensten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 2. November 1905.)

Nachtrag zu p. 41. Hr. Prof. Dr. J. Hartmann teilte mir freundlichst mit, daß seine Dispersionsformel

$$\mu - \mu_0 = \frac{c}{(\lambda - \lambda_0)^\alpha}$$

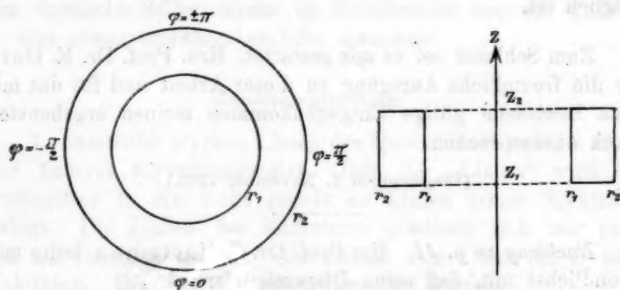
eine genaue Darstellung von μ gestattet. Begnügt man sich mit der Näherung $\alpha = 1$, so werden alle vier gegebenen Werte von μ durch $\mu_0 = 1,5470$; $c = 108,274$ und $\lambda_0 = 1970,0$ ganz genau dargestellt.

5. Elektrische Schwingungen in ringförmigen Metallröhren; von A. Kälähne.

Zweiter Teil.¹⁾

Allgemeine Form der Lösung für stehende Schwingungen;
Periode der Eigenschwingungen.

§ 15. In den vorhergehenden Paragraphen haben wir die Lösung der Maxwellschen Gleichungen für den Fall elektrischer Schwingungen in einem mit Dielektrikum erfüllten Kreisring von rechteckigem Querschnitt angegeben, wenn dessen Wände aus Metall mit unendlich großer Leitfähigkeit gebildet werden. Die Ringwände sind die Zylindermäntel



a) Ring von oben gesehen.

b) Ringquerschnitt durch die z -Achse.

Fig. 2.

$r=r_1$ und $r=r_2$, sowie die Ebenen $z=z_1$ und $z=z_2$ (vgl. Fig. 2). Es wurde dabei also jede Dämpfung ausgeschlossen, und die Grenzbedingungen reduzierten sich auf die acht Gleichungen (35), denen zufolge bestimmte Komponenten der elektrischen Kraft an bestimmten Wänden dauernd verschwinden

1) Die Abhandlung bildet die Fortsetzung der in diesen Annalen 18. p. 92. 1905 erschienenen Arbeit; zur bequemeren Übersicht ist die Bezifferung der Paragraphen und Figuren einfach weitergeführt.

müssen. Die Lösung gelang durch Zerspaltung nach den drei Koordinaten und der Zeit, wobei die elektrischen und magnetischen Kraftkomponenten als Produkte von je vier Funktionen auftreten, deren jede nur von einer Koordinate oder der Zeit (z, r, φ, t) abhängt. Bezeichnen wir vier solche Funktionen in derselben Reihenfolge mit Z, R, Φ, Θ und ihre Ableitungen nach den Argumenten durch Strichindizes Z', R', Φ', Θ' , so erhalten wir in allgemeinsten Form für stehende Schwingungen aus dem System mit den Koeffizienten A (vgl. Gleichung (44) und (44a))

$$(68) \quad \begin{cases} E_z = A Z' R \Phi \Theta, & M_z = 0, \\ E_r = -\frac{A p}{r} Z R' \Phi \Theta, & M_r = \frac{A n h}{r} Z' \frac{R}{\varphi} \Phi' \Theta, \\ E_\varphi = -\frac{A p n}{r} Z \frac{R}{\varphi} \Phi' \Theta, & M_\varphi = -\frac{A h}{r} Z' R' \Phi \Theta. \end{cases}$$

System (68) entsteht aus (44a), indem man $e^{in\varphi}$ in $\cos n\varphi + i \sin n\varphi$ zerlegt und nur den reellen Teil oder nur den rein imaginären Teil, von dem Faktor i befreit, beibehält. Die Funktion e^{ikt} kann unverändert stehen bleiben, da ihre Zerspaltung in $\cos kt + i \sin kt$ zwei gleiche Systeme ergeben würde, deren Phasen sich nur um $\pi/2$ unterscheiden. Zur Darstellung fortschreitender Wellen müßte man dagegen, wie wir es auch früher getan haben, das Produkt

$$e^{ikt} e^{in\varphi} = e^{ikt + in\varphi}$$

zerlegen in $\cos(kt + n\varphi) + i \sin(kt + n\varphi)$. Wir beschränken uns aber auf stehende Schwingungen. Die in (68) vorkommenden Funktionen haben dann folgende Werte:

$$(69) \quad \begin{cases} \varrho = r\tau, \\ \Theta = e^{ikt}, \\ Z = \sin p(z - z_1), \\ R = J_n(\varrho) + A' K_n(\varrho) = J_n(\varrho) - \frac{J_n(\varrho_1)}{K_n(\varrho_1)} K_n(\varrho), \\ \Phi = \sin n(\varphi - \varphi_0) \quad \text{oder} \quad \cos n(\varphi - \varphi_0). \end{cases}$$

Statt des Winkels φ haben wir allgemeiner $\varphi - \varphi_0$ gesetzt, indem wir φ_0 als Ausgangspunkt der Zählung nehmen; $\sin n(\varphi - \varphi_0)$ oder $\cos n(\varphi - \varphi_0)$ ist zu wählen je nach der Lage

von etwaigen Querwänden in dem Ringe. Aus R haben wir die willkürliche Konstante A_1 , die früher in $R = A_1 J_n(\rho) + A_2 K_n(\rho)$ (vgl. § 5) vorkam, herausgenommen und sie A genannt; sie bestimmt die Amplitude der Schwingung. Der Quotient A_2/A_1 der alten Form wird jetzt mit A' bezeichnet. Das System (68) erfüllt alle Grenzbedingungen, wenn

1. p eine Wurzel der Gleichung $e^{2ip(s_1 - s_2)} = 1$ ist, also nach (48) die Form hat

$$p = \frac{s\pi}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad (s = 0, 1, 2 \dots),$$

wenn

2. n bei einem Vollringe eine ganze Zahl ist oder bei einem Ringsektor mit dem Winkel γ den Wert $\pi m/\gamma$ besitzt ($m = 1, 2, 3 \dots$) und wenn
3. τ eine Wurzel der Gleichung (41)

$$\frac{J_n(r_1 \tau)}{K_n(r_1 \tau)} = \frac{J_n(r_2 \tau)}{K_n(r_2 \tau)}$$

darstellt.

Als Spezialfall des Ringsektors betrachteten wir einen Vollring mit einer einzigen meridionalen Scheidewand an einer Stelle $\varphi = \text{konst.}$ Für diesen muß unter Umständen $n = \nu + \frac{1}{2}$ sein, wo ν eine ganze Zahl ist. Für den Fall $\nu = 0$, also $n = \frac{1}{2}$, erhält man aus (68) das früher schon ausführlich hingeschriebene System (55).

Ein dem System (68) analoges System, in welchem die Koeffizienten A durch B ersetzt sind, erhält man aus (45) bez. (45a), nämlich:

$$(70) \quad \begin{cases} E_s = 0, & M_s = B Z R \Phi' \Theta, \\ E_r = -\frac{B n h \sigma^2}{\tau} Z \frac{R}{\varrho} \Phi \Theta, & M_r = \frac{B p}{\tau} Z' R' \Phi' \Theta, \\ E_\varphi = -\frac{B h \sigma^2}{\tau} Z R' \Phi' \Theta, & M_\varphi = -\frac{B n p}{\tau} Z' \frac{R}{\varrho} \Phi \Theta. \end{cases}$$

Die Bezeichnungen sind außer der Vertauschung von B und A dieselben, nur leitet sich die transzendente Bestimmungsgleichung für τ von R' ab, nämlich:

$$\frac{J_n'(r_1 \tau)}{K_n'(r_1 \tau)} = \frac{J_n'(r_2 \tau)}{K_n'(r_2 \tau)}.$$

System (70) hat die Eigentümlichkeit, daß seine elektrischen

Kraftlinien, da die Komponente E_z dauernd gleich Null ist, ebene Kurven sind, die in Ebenen senkrecht zur z -Achse verlaufen. Wir werden im folgenden besonders die Eigenschwingungsperioden, den Kraftlinienverlauf und die Schwingungen bei willkürlich gegebenem Anfangszustand behandeln und uns dabei wesentlich an das System (68) halten; die Resultate lassen sich, abgesehen von den rein zahlenmäßigen Beziehungen, alle auf System (70) übertragen.

§ 16. Jeder der drei Parameter p, τ, n , die in je einer der drei Funktionen Z, R, Φ vorkommen, kann unendlich viele diskrete Werte annehmen, die sich aus den Grenzbedingungen als Wurzeln gewisser, transzendenter Gleichungen ergeben. Der Parameter p ist unabhängig, zwischen τ und n besteht jedoch eine gewisse Abhängigkeit, indem n selbst als Parameter der Besselschen Funktionen auftritt, die in der transzendenten Gleichung für τ vorkommen. Die Abhängigkeit ist derart, daß zu jedem konstanten Wert von n eine unendliche Reihe diskreter Werte τ gehört; nur die absoluten Werte derselben ändern sich mit n , nicht ihre Zahl und Aufeinanderfolge.

In den Ausdrücken für die elektrischen und die magnetischen Kräfte hat man also wegen der in ihnen enthaltenen Produkte von je drei der Größen Z, R, Φ und ihrer Ableitungen die Auswahl unter einer dreifach unendlichen Mannigfaltigkeit, die durch die verschiedenen Kombinationen der Werte von p, τ, n gegeben ist. Zu jeder Kombination gehört ein bestimmtes System der elektrischen und magnetischen Kräfte mit charakteristischem Kraftlinienverlauf und einer bestimmten Eigenschwingungsdauer T , die sich ebenfalls aus den Werten der drei Parameter ergibt. Aus (38) und der letzten Formel von (37) folgt nämlich die in Θ vorkommende Zeitkonstante k , die nach (36) mit T zusammenhängt; es ist:

$$(71) \quad k^2 = V^2(p^2 + \tau^2).$$

Also wird für ungedämpfte Schwingungen, bei denen die Konstante β in (36) wegfällt,

$$(72) \quad \frac{2\pi}{T} = V\sqrt{p^2 + \tau^2},$$

wo V wie bisher die Lichtgeschwindigkeit im unbegrenzten Dielektrikum (ϵ, μ) bedeutet.

Die Formel (72) ist dieselbe, die wir früher für der speziellen Fall $n = \frac{1}{2}$ in (54) hingeschrieben haben¹⁾; p und τ waren daselbst in der allgemeinsten Form der Wurzeln ihrer transzendenten Bestimmungsgleichungen dargestellt als Funktionen der Höhe $z_2 - z_1$ und Breite $r_2 - r_1$ des Ringes und der willkürlichen ganzen Zahlen s und w .

$$p^{(s)} = \frac{s\pi}{z_2 - z_1} \quad \text{und} \quad \tau^{(w)} = \frac{w\pi}{r_2 - r_1}.$$

Diese Form gilt nach (48) für p immer, für τ aber nur, wenn $n = \frac{1}{2}$ ist. Für $n = \frac{3}{2}$ haben wir in (60) eine ähnliche Darstellung¹⁾ von τ gegeben, in der statt $w\pi$ die Summe $w\pi + f(w, q)$ stand. Der durch (58) definierte Parameter q hängt von der Krümmung des Ringes ab; $f(w, q)$ ist eine Funktion, die nur für ganzzahlige w definiert zu sein braucht und für sehr große w asymptotisch verschwindet. Die Darstellung der Wurzeln τ in der Form

$$(73) \quad \tau^{(w)} = \frac{w\pi + f(w, q)}{r_2 - r_1}$$

ist natürlich auch für andere Werte von n zulässig, $f(w, q)$ hängt dann noch von n ab.

$$\text{Die Wurzeln } \tau \text{ der Gleichung (41)} \quad \frac{J_n(r_1 \tau)}{K_n(r_1 \tau)} = \frac{J_n(r_2 \tau)}{K_n(r_2 \tau)}.$$

§ 17. In den §§ 11—14 der ersten Mitteilung haben wir für einige gebrochene Indizes ($n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$) der Besselschen Funktionen die Wurzeln τ niederer Ordnung der transzendenten Gleichung (41) berechnet oder wenigstens ein graphisches Verfahren zur Ermittlung derselben angegeben, und zwar für drei verschieden stark gekrümmte Ringe. Die Krümmung wurde durch das Verhältnis des mittleren Ringdurchmessers $r_2 + r_1$ zur Ringbreite $r_2 - r_1$ gemessen, das wir nach (58) q nannten. Wir wollen hier allgemeiner die Wurzeln τ bei den gleichen Werten der Krümmung q sowohl für die angegebenen gebrochenen wie für einige ganzzahlige Indizes n berechnen. Zu diesem Zweck wenden wir die Formeln an, welche

1) In Gleichung (54) und ebenso in (60) ist in dem Gliede mit T^2 im Nenner versehentlich der Faktor V^2 weggelassen, es muß dort statt T^2 das Produkt $V^2 T^2$ stehen.

Mac Mahon¹⁾ für die Wurzeln der Besselschen Funktionen gegeben hat. Danach lassen sich die Wurzeln $x_n^{(w)}$ der Gleichung

$$(74) \quad \frac{J_n(x)}{K_n(x)} = \frac{J_n(x)}{K_n(x)},$$

wenn $x > 1$ ist, darstellen durch die Reihe:

$$(75) \quad x_n^{(w)} = \delta + \frac{p}{\delta} + \frac{q - p^2}{\delta^3} + \frac{r - 4pq + 2p^3}{\delta^5} + \dots,$$

wobei gesetzt ist

$$(76) \quad \begin{cases} \delta = \frac{w\pi}{x-1}, & p = \frac{m-1}{8x}, & q = \frac{4(m-1)(m-25)(x^3-1)}{3(8x)^3(x-1)}, \\ r = \frac{32(m-1)(m^2-114m+1073)(x^5-1)}{5(8x)^5(x-1)}, & m = 4n^2, \end{cases}$$

und w nacheinander die Werte 1, 2, 3 ... annehmen kann. Die Größen p, q, r dieser Gleichungen haben natürlich mit unseren p, q, r nichts zu tun, ebensowenig hat x mit dem früher gebrauchten x , das die Leitfähigkeit der metallenen Wände darstellte, gemein.

Durch Vergleichung von (74) mit (41) erkennt man, daß zu setzen ist statt:

$$(77) \quad \begin{cases} x_n^{(w)} & \varrho_1, \\ x x_n^{(w)} & \varrho_2, \\ x & \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{r_2}{r_1}, \\ x-1 & \frac{r_2-r_1}{r_1}. \end{cases}$$

Also kann man τ in der Form darstellen:

$$(78) \quad \tau = \frac{(x-1)x_n^{(w)}}{r_2-r_1}.$$

1) J. Mac Mahon, *Annals of Mathematics* 9. p. 28. 1894/95. Die Formeln von Mac Mahon sind abgedruckt bei A. Gray u. G. B. Mathews, *A Treatise on Bessel Functions and their Applications to Physics*. London 1895. p. 241 ff. Dieser Abdruck enthält einige Druckfehler. Auf p. 241 muß es unter (I) bei den Wurzeln von $J_n(x) = 0$ im letzten Gliede von $x_n^{(a)}$ 1585743 m heißen statt 185743 m. Ferner muß es p. 242 unter (VI) im Nenner von r $(8\varphi)^5$ heißen statt $(8\varphi^3)$, wie man durch Vergleichung mit der Originalabhandlung sieht.

Die Größe $\kappa = r_2/r_1$ bestimmt die Krümmung des Ringes und hängt mit dem früher zu gleichem Zweck benutzten q zusammen durch die Relationen

$$(79) \quad \kappa = \frac{q+1}{q-1} \quad \text{oder} \quad q = \frac{\kappa+1}{\kappa-1}.$$

Man erhält also aus (75) τ in der Form von (73), da $\delta = w\pi/(\kappa-1)$ ist; $f(w, q)$ hat dabei die Gestalt einer unendlichen Reihe. Leider gibt es, wie ich einer Notiz in Nielsens¹⁾ Handbuch entnehme, noch keine Untersuchungen über die Konvergenz und die Restglieder der Reihe (75). Man kann im allgemeinen nur sagen, daß die Konvergenz um so besser wird, je kleiner n und κ und je größer w ist; mit wachsendem w nimmt die Konvergenz jedenfalls sehr schnell zu. Bei der numerischen Berechnung findet man, daß für kleine κ , also große δ , die in (75) hingeschriebenen Glieder sehr schnell abnehmen. Aber bereits bei $\kappa=3$ wird für $n=0$ und $w=1$ das vierte Glied größer als das dritte, so daß die Konvergenz der Reihe, deren Glieder — soweit sie hingeschrieben sind — abwechselnd positives und negatives Vorzeichen haben, unsicher wird. Jedenfalls ist die Reihe zur numerischen Berechnung für $\kappa \geq 3$ sicher nicht mehr zu gebrauchen.

§ 18. Ich habe für die Werte $n=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$ und $\kappa = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2$ (entsprechend den Werten $q=11, 5, 3$ der früheren Mitteilung) die sechs ersten Wurzeln $x_n^{(w)}$ ($w=1$ bis 6) als Summe der vier ersten Glieder von Formel (75) bis auf vier Dezimalen berechnet (vgl. Tab. 5). Vorausgesetzt, daß die Summe aller folgenden Glieder höchstens den Betrag des letzten in Rechnung gezogenen Gliedes erreicht, kann man die Unsicherheit des Resultates im Maximum gleich der Größe des vierten Gliedes setzen. Demgemäß ist in Tab. 5 da, wo diese Unsicherheit 1 bis 2 Einheiten einer Dezimale beträgt, dies durch kleinen Druck der betreffenden Ziffer angedeutet; beträgt sie mehr als zwei Einheiten, so ist die Ziffer außerdem unterstrichen; bei allen anderen ist sie kleiner als 0,5 Einheiten der vierten Stelle. Man erkennt leicht, in welcher Weise die Wurzeln von den ganzzahligen Vielfachen $w\pi$ von π

1) N. Nielsen, l. c. p. 173.

abweichen, da diese Werte in der Tabelle für $n = \frac{1}{2}$ enthalten sind.

Für die physikalische Anwendung werden die Resultate noch brauchbarer, wenn man die Werte der Tab. 5 mit $\kappa - 1$ multipliziert. Man erhält dann nach (78) direkt den Wert von $\tau(r_2 - r_1)$, den man in (72) einzusetzen hat. Diese Produkte $(\kappa - 1)x_n^{(w)}$ sind in der ähnlich eingerichteten Tab. 6 aufgeführt. Außer für die Werte κ der Tab. 5 findet man darin auch für $\kappa = \infty$ die Werte des Produktes $(\kappa - 1)x_n^{(w)}$ angegeben, die man auf folgende Weise erhält. Wie schon bemerkt wurde, lassen sich die Mac Mahonschen Reihen nur bis $\kappa = 2$ verwerten, für größere κ versagen sie. Man erkennt aber ohne weiteres, daß die Wurzeln $x_n^{(w)}$ mit unendlich wachsendem κ sich dem Werte Null nähern. Das Produkt $(\kappa - 1)x_n^{(w)}$ bleibt jedoch endlich. Läßt man nämlich $\kappa = r_2/r_1$ unbegrenzt zunehmen, so ist das gleichbedeutend mit Abnahme von r_1 bis auf Null, wenn r_2 endlich bleibt. Man gelangt damit also zu dem schon früher angegebenen Grenzfall eines zylindrischen Raumes mit unendlich dünnem Mittelpfeiler. Da nun aber im ganzen Innern dieses Raumes die elektrischen und magnetischen Kräfte endlich bleiben müssen, so kann dies, da jetzt auch der Wert $\varrho_1 = r_1, \tau = 0$ des Argumentes in den Besselschen Funktionen vorkommt, nur dadurch geschehen, daß die Besselsche Funktion zweiter Art wegfällt. Mathematisch folgt dies Resultat daraus, daß für den Fall $r_1 = 0$ der Koeffizient von $K_n(\varrho)$ in R (vgl. Gl. (69)) identisch gleich Null ist. Die Grenzbedingung, welcher R an den Wänden r_1 und r_2 zu genügen hat, wird also in diesem Falle einfacher

$$J_n(r\tau) = 0 \text{ für } r = r_1 \text{ und } r = r_2.$$

Da für $r_1 = 0$ diese Bedingung identisch erfüllt ist, wenn $n > 0$ ist, so bleibt als einzige Bedingungsgleichung

$$(80) \quad J_n(r_2\tau) = 0.$$

Die Wurzeln $\xi_n^{(w)}$ der Gleichung $J_n(\xi) = 0$ geben somit die Werte des Produktes $r_2\tau$ an, in welches $(r_2 - r_1)\tau$ für $r_1 = 0$ übergeht, und diese sind nach (78) identisch mit $(\kappa - 1)x_n^{(w)}$. Auf diese Weise erhält man die in Tab. 6 für $\kappa = \infty$ angegebenen Werte als Wurzeln der Gleichung $J_n(\xi) = 0$, für welche

Tabelle 5.

Wurzeln $x_n^{(w)}$ der Gleichung $\frac{J_n(x)}{K_n(x)} = \frac{J_n(\pi x)}{K_n(\pi x)}$.

x	$w = 1$	$w = 2$	$w = 3$	$w = 4$	$w = 5$	$w = 6$	
1,2	15,7014	31,4126	47,1217	62,8302	78,5385	94,2467	$n = 0$
1,5	6,2702	12,5598	18,8451	25,1294	31,4133	37,6969	
2,0	3,122 _a	6,2734	9,4182	12,5614	15,7040	18,8462	
1,2	15,7080	31,4159	47,1239	62,8319	78,5398	94,2478	$n = \frac{1}{2}$
1,5	6,2832	12,5664	18,8496	25,1327	31,4159	37,6991	
2,0	3,1413	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	
1,2	15,7277	31,4259	47,1305	62,8368	78,5438	94,2511	$n = 1$
1,5	6,321 _a	12,5861	18,8628	25,1427	31,4239	37,7057	
2,0	3,19 ₇	6,3124	9,4445	12,5812	15,7199	18,8595	
1,2	15,7607	31,4424	47,1416	62,8451	78,5504	94,2566	$n = \frac{3}{2}$
1,5	6,385 _a	12,6190	18,8848	25,1592	31,4371	37,7168	
2,0	3,28 _a	6,360 ₇	9,4772	12,6059	15,7397	18,8760	
1,2	15,8066	31,4656	47,1570	62,8567	78,5597	94,2644	$n = 2$
1,5	6,474 _a	12,6648	18,9156	25,1823	31,4556	37,7322	
2,0	3,40 _a	6,427 ₇	9,5228	12,6404	15,7673	18,8991	
1,2	15,8655	31,4953	47,1769	62,8716	78,5716	94,2743	$n = \frac{5}{2}$
1,5	6,586 _a	12,7235	18,9551	25,2121	31,4795	37,7521	
2,0	—	—	—	—	—	—	

Mac Mahon¹⁾ ebenfalls Reihenentwicklungen mitgeteilt hat. Nach diesen Reihen habe ich die Werte für $n = 2$ und $n = \frac{5}{2}$ berechnet. Für $n = \frac{1}{2}$ ist keine Rechnung nötig, da die Produkte einfach ganzzahlige Vielfache von π werden; für $n = 0$ und $n = 1$ liegen sehr genaue Berechnungen von Meissel²⁾ vor und für $n = \frac{3}{2}$ hat Lord Rayleigh³⁾ die sechs ersten Wurzeln der Gleichung $\operatorname{tg} x = x$, in welche $J_{1/2}(x) = 0$ übergeht, berechnet. Rayleigh hat diese Wurzeln als Produkte von π mit je einer auf vier Dezimalen angegebenen Zahl mitgeteilt.

1) Mac Mahon, l. c. p. 23.

2) E. Meissel, Abhandl. d. Berl. Akad. d. Wissensch. 1888 (für $n = 0$); Programm der Oberrealschule in Kiel 1890 (für $n = 1$); beide Tabellen bei Gray u. Mathews.

3) Lord Rayleigh, l. c. p. 369.

Tabelle 6.

Wurzeln $(r_2 - r_1) \tau$ der Gleichung $\frac{J_n(r_1 \tau)}{K_n(r_1 \tau)} = \frac{J_n(r_2 \tau)}{K_n(r_2 \tau)}$, $(r_2 - r_1) \tau = (n-1) x_n^{(w)}$ (vgl. Tab. 5).

x	$w = 1$	$w = 2$	$w = 3$	$w = 4$	$w = 5$	$w = 6$	
1,2	3,1403	6,2825	9,4243	12,5660	15,7077	18,8493	$n = 0$
1,5	3,1351	6,2799	9,4226	12,5647	15,7066	18,8485	
2,0	3,122 <u>8</u>	6,2734	9,4182	12,5614	15,7040	18,8462	
∞	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711	
1,2	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	$n = \frac{1}{2}$
1,5	"	"	"	"	"	"	
2,0	"	"	"	"	"	"	
∞	"	"	"	"	"	"	
1,2	3,1455	6,2852	9,4261	12,5674	15,7088	18,8502	$n = 1$
1,5	3,1609	6,2931	9,4314	12,5713	15,7119	18,8529	
2,0	3,197	6,3124	9,4445	12,5812	15,7199	18,8595	
∞	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706	19,6159	
1,2	3,1521	6,2885	9,4283	12,5690	15,7101	18,8513	$n = \frac{3}{2}$
1,5	3,1929	6,3095	9,4424	12,5796	15,7186	18,8584	
2,0	3,28 <u>2</u>	6,3607	9,4772	12,6059	15,7397	18,8760	
∞	4,4934	7,7252	10,9042	14,0577	17,2216	20,3713	
1,2	3,1613	6,2931	9,4314	12,5713	15,7119	18,8529	$n = 2$
1,5	3,2371	6,3324	9,4578	12,5912	15,7278	18,8661	
2,0	3,40 <u>2</u>	6,4277	9,5228	12,6404	15,7673	18,8991	
∞	5,135 <u>1</u>	8,4172	11,6198	14,7960	17,9598	21,1170	
1,2	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143	18,8549	$n = \frac{5}{2}$
1,5	3,293 <u>0</u>	6,3617	9,4775	12,6060	15,7397	18,8760	
2,0	—	—	—	—	—	—	
∞	5,763 <u>1</u>	9,0950	12,3229	15,5146	18,6890	21,8539	

In Tab. 6 sind diese Produkte ausmultipliziert; die Unsicherheit ist auf 1 bis 2 Einheiten der vierten Dezimale geschätzt unter der Voraussetzung, daß die Rayleighschen Zahlen bis auf 0,5 Einheiten der vierten Dezimale richtig sind. Wie in Tab. 5 beträgt die Unsicherheit im allgemeinen weniger als 0,5 Einheiten der vierten Dezimale; bei den klein gedruckten Zahlen jedoch 1 bis 2 Einheiten und bei den unterstrichenen mehr als 2 Einheiten der betreffenden Stelle.

Tab. 6 gewährt einen Überblick über den Verlauf der für uns wichtigen Funktion $(x-1)x_n^{(w)} = (r_2 - r_1)\tau$, wenn man die Krümmung des Ringes, gemessen durch $x = r_2/r_1$, sich ändern läßt. Nimmt man zu den mitgeteilten Werten noch die Grenzwerte für $x = 1$ (gerades Rohr, also unendlich kleine Krümmung) hinzu, die sämtlich ganzzahlige Vielfache von π sind, so umfaßt die Tabelle das ganze Gebiet. Man erkennt leicht, daß der Fall $n = \frac{1}{2}$ eine Grenzscheide bildet; für $n < \frac{1}{2}$ nehmen die Werte mit wachsendem x ab, für $n > \frac{1}{2}$ nehmen sie zu. Die Grenzwerte für $x = 1$ und $x = \infty$ rücken mit wachsendem n immer weiter auseinander. Die Ordnungszahl w bestimmt die Zahl der Nulllinien oder Knotenlinien, welche R in dem Ringgebiet zwischen r_1 und r_2 besitzt und die konzentrische Kreise sind. Ihre Anzahl ist gleich $w - 1$.

§ 19. Wenn die Wurzeln der Gleichungen $J_n(\xi) = 0$ bez. $K_n(\xi) = 0$ bekannt sind, so lassen sich auf einem anderen Wege noch beliebig viele Wurzeln τ der Gleichung (41) für bestimmte irrationale Werte von x angeben. Betrachtet man nämlich wieder den Grenzfall des Ringes, bei dem sich die innere Zylinderwand auf die z -Achse reduziert hat, oder besser den Schnitt dieses Ringes mit der Ebene $z = 0$, der einen Vollkreis darstellt, so geht für diesen, wie wir sahen, R in $J_n(r\tau)$ über. Die Funktion $J_n(r\tau)$ hat in diesem Gebiet eine Anzahl konzentrischer Kreise ($r', r'' \dots$) zu Nulllinien, deren Radien im Verhältnis der aufeinanderfolgenden Wurzeln der Gleichung $J_n(\xi) = 0$ stehen. Über zwei beliebigen dieser Kreise kann man die Zylindermäntel r_1 und r_2 errichten und erhält mit Zuhilfenahme der Ebenen z_1 und z_2 einen Ring, für welchen x gleich dem Verhältnis der zugehörigen Wurzeln ξ ist. Haben diese Wurzeln die Ordnungszahlen α und β , so ist

$$x = \frac{\xi_n^{(\beta)}}{\xi_n^{(\alpha)}},$$

wenn $\beta > \alpha$ ist. Zugleich stellt die kleinere Wurzel $\xi_n^{(\alpha)}$ den Wert $x_n^{(w)}$ unserer Gleichung (41) für diesen Spezialfall dar. Man erhält aber nur eine einzige Wurzel, da $w = \beta - \alpha$ schon durch α und β oder, mit anderen Worten, durch die Anzahl der Nulllinien bestimmt ist, welche $J_n(\xi)$ zwischen den Werten $\xi_n^{(\alpha)}$ und $\xi_n^{(\beta)}$ besitzt. Dieselbe Wurzel $\xi_n^{(\alpha)}$ gilt, jedoch

mit immer anderem w , für beliebig viele Ringe, deren x nacheinander die Werte

$$\frac{\xi_n^{(a+1)}}{\xi_n^{(a)}}, \frac{\xi_n^{(a+2)}}{\xi_n^{(a)}} \dots \text{etc.}$$

annimmt. Es wird also

$$(81) \quad x_n^{(w)} = x_n^{(\beta-a)} = \xi_n^{(a)} \quad \text{für} \quad x = \frac{\xi_n^{(\beta)}}{\xi_n^{(a)}}.$$

Weiter erhält man hieraus die uns besonders interessierende Größe

$$(82) \quad (x-1)x_n^{(w)} = \xi_n^{(\beta)} - \xi_n^{(a)}$$

für denselben Wert von x .

Da der Punkt $r=0$ vollständig herausfällt, so gilt dieselbe Betrachtung auch für die Besselsche Funktion zweiter Art, die im Nullpunkt unendlich wird.

Man kann diese Methode jedoch nur auf solche Besselsche Funktionen anwenden, deren Wurzeln schon bekannt, oder deren Werte in Tafeln mit solcher Genauigkeit niedergelegt sind, daß man die Wurzeln ξ selbst hinreichend genau bestimmen kann. Das erste ist nur für $J_0(\xi)$ und $J_1(\xi)$ der Fall, das andere kann auf die Besselschen Funktionen zweiter Art von der Ordnung 0 und 1 Anwendung finden. Die von Lommel¹⁾ berechneten Tafeln der Poissonschen Funktionen für $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ bis $\frac{69}{2}$ schreiten nur nach ganzzahligen Argumenten fort, sind also nicht genau genug. Für ganzzahlige n liegt die Sache besser. Zwar existieren für die von uns in § 6 definierte Funktion $K_n(\xi)$ keine Tafeln, wohl aber für eine andere Funktion $Y_n(\xi)$, die häufig ebenso wie $K_n(\xi)$ als Neumannsche Zylinderfunktion bezeichnet wird und mit $K_n(\xi)$ verbunden ist durch die Beziehung

$$(83) \quad \frac{\pi}{2} K_n(\xi) = Y_n(\xi) - J_n(\xi) \cdot [\log 2 - C],$$

wo C die Eulersche Konstante und $\log 2$ den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Der Faktor $\log 2 - C$ hat den Wert 0,11593 15157.

1) E. Lommel, Abhandl. d. bayr. Akad. d. Wissensch., math.-phys. Kl. 15. p. 644. 1886.

$Y_n(\xi)$ ist von Schläfli¹⁾ durch eine Reihenentwicklung dargestellt worden, die bei Gray und Mathews²⁾ angegeben ist. Für die Werte $n=0$ und $n=1$ hat Smith³⁾ eine vierstellige Tafel berechnet, die bis zu dem Argument 10,2 hinaufreicht; von 0 bis 1 mit dem Intervall 0,01, von 1 bis 10,2 mit dem Intervall 0,1. Mit Hilfe dieser Tabellen lassen sich, am bequemsten graphisch, die Wurzeln $\xi_n^{(a)}$ der Funktionen $Y_0(\xi)$ und $Y_1(\xi)$ ermitteln. Sie sind mit einigen Wurzeln von $J_0(\xi)$ und $J_1(\xi)$ in Tab. 7 zusammengestellt. Die Unsicherheit kann bei den graphisch bestimmten Wurzeln von Y_0 und Y_1 etwa 2 Einheiten der letzten Stelle betragen.

Tabelle 7.

α	Wurzeln der Gleichung			
	$J_0(\xi) = 0$ $\xi_0^{(a)}$	$J_1(\xi) = 0$ $\xi_1^{(a)}$	$Y_0(\xi) = 0$ $\xi_0^{(a)}$	$Y_1(\xi) = 0$ $\xi_1^{(a)}$
1	2,40483	3,83171	0,8260	2,118
2	5,52007	7,01559	3,885	5,355
3	8,65373	10,17347	7,013	8,521
4	11,79153	13,32369	10,149	
5	14,93092	16,47063		
6	18,07106	19,61586		

Daraus erhält man sofort die Tab. 8—11, in denen die Differenz $\xi_n^{(a+w)} - \xi_n^{(a)}$ jedesmal den gesuchten Wert $(x-1)x_n^{(w)}$ darstellt.

1) Schläfli, Math.-Ann. 3. p. 143. 1871.

2) Die bei A. Gray u. G. B. Mathews (l. c. p. 14) stehende Formel für Y_n ist durch einen Druckfehler entsteht. In dem Ausdruck für k_n , [Formel (31)] muß das letzte Glied $\sum_{s=1}^n \frac{1}{2s}$ positives Vorzeichen haben statt des negativen. Wie mir Hr. Prof. H. Weber in Straßburg brieflich mitteilt, ergibt die Übertragung der Schläflischen Formel in die Bezeichnung von Gr. und M. das richtige positive Vorzeichen, so daß der Fehler nur in dem genannten Buch vorkommt. Die nach der Gray-Mathewsschen Formel berechnete Tabelle von Smith wird von diesen Fehler nicht beeinflusst, da für $n=0$ das betreffende Glied wegfällt.

3) B. A. Smith, The Messenger of Mathematics 26. p. 98—101. 1897.

Tabelle 8.

$$J_0(\xi) = 0.$$

w	$\frac{(1+w)}{\mu_p^0} \parallel \frac{(1)}{\mu_p^0}$	$\frac{(1)}{\mu_p^0} - \frac{(1+w)}{\mu_p^0}$	$\frac{(w)}{\mu_p^0} \parallel \frac{(2)}{\mu_p^0}$	$\frac{(2)}{\mu_p^0} - \frac{(w)}{\mu_p^0}$	$\frac{(w)}{\mu_p^0} \parallel \frac{(3)}{\mu_p^0}$	$\frac{(3)}{\mu_p^0} - \frac{(w)}{\mu_p^0}$
1	2,2954	3,1152	1,5677	3,1837	1,3625	3,1378
2	3,5985	6,2489	2,1361	6,2715	1,7253	6,2772
3	4,9033	9,3867	2,7048	9,4108	2,0882	9,4173
4	6,2087	12,5361	3,2737	12,5510		

Tabelle 9.

$$J_1(\xi) = 0.$$

w	$\frac{(1)}{\mu_p^1} \parallel \frac{(1)}{\mu_p^1}$	$\frac{(1)}{\mu_p^1} - \frac{(1)}{\mu_p^1}$	$\frac{(1)}{\mu_p^1} \parallel \frac{(2)}{\mu_p^1}$	$\frac{(2)}{\mu_p^1} - \frac{(1)}{\mu_p^1}$	$\frac{(1)}{\mu_p^1} \parallel \frac{(3)}{\mu_p^1}$	$\frac{(3)}{\mu_p^1} - \frac{(1)}{\mu_p^1}$
1	1,8309	3,1839	1,4501	3,1579	1,3096	3,1502
2	2,6551	6,3418	1,8992	6,3081	1,6190	6,2972
3	3,4772	9,4920	2,3478	9,4550	1,9281	9,4424
4	4,2986	12,6389	2,7960	12,6003		

Tabelle 10.

$$Y_0(\xi) = 0.$$

w	$\frac{(1+w)}{\mu_p^0} \parallel \frac{(1)}{\mu_p^0}$	$\frac{(1)}{\mu_p^0} - \frac{(1+w)}{\mu_p^0}$	$\frac{(w)}{\mu_p^0} \parallel \frac{(2)}{\mu_p^0}$	$\frac{(2)}{\mu_p^0} - \frac{(w)}{\mu_p^0}$	$\frac{(w)}{\mu_p^0} \parallel \frac{(3)}{\mu_p^0}$	$\frac{(3)}{\mu_p^0} - \frac{(w)}{\mu_p^0}$
1	4,703	3,059	1,805	3,128	1,447	3,136
2	8,490	6,187	2,612	6,264		
3	12,287	9,323				

Tabelle 11.

$$Y_1(\xi) = 0.$$

w	$x = \frac{\xi_1^{(1+w)}}{\xi_1^{(1)}}$	$\xi_1^{(1+w)} - \xi_1^{(1)}$	$x = \frac{\xi_1^{(2+w)}}{\xi_1^{(2)}}$	$\xi_1^{(2+w)} - \xi_1^{(2)}$
1	2,528	3,287	1,591	3,166
2	4,023	6,403		

Die Werte $x_n^{(w)}$ bez. $(x-1)x_n^{(w)}$ der Tab. 8—11 ordnen sich in die Tab. 6 und 7 ein. Man sieht, daß man auf diese Weise, wenn genügend viele Wurzeln ξ bekannt sind, in zwei Richtungen weiterkommen kann. Erstens erhält man auch für große

Werte von x Wurzeln $x_n^{(w)}$, aber nur solche höherer Ordnung, da der Quotient x zweier nahe beieinander liegender Wurzeln ξ , die ein kleines w geben, selbst klein bleibt. Für $w=1$ ist der größte Wert x , der in den Tab. 8—11 vorkommt, derjenige für $Y_0(\xi)$ in Tab. 10, gleich 4,703; alle anderen, insbesondere die Werte für $J_1(\xi)$ und $Y_1(\xi)$, die uns mehr interessieren, bleiben kleiner. Man kann also die Wurzeln τ niedriger Ordnung der Gleichung (41) für große x auf diesem Wege nicht erhalten. Dagegen findet man sehr bequem für ganz schwach gekrümmte Ringe, bei denen x sich der 1 nähert, um so mehr Werte, je kleiner w ist.

Da bei gegebener Differenz $\beta - \alpha = w$ der Wert $x = \xi_n^{(\beta)} / \xi_n^{(\alpha)}$ um so größer wird, je kleiner die Wurzel $\xi_n^{(\alpha)}$ ist, so kann man bei kleinem w für noch größere x Wurzeln erhalten, wenn man aus $J_n(\xi)$ und $K_n(\xi)$ mit einer passenden Konstante a ein allgemeines Integral $R = J_n(\xi) + a Y_n(\xi)$ bildet, dessen kleinste Wurzel näher bei Null liegt als die kleinste Wurzel von $J_n(\xi)$ oder $Y_n(\xi)$.

§ 20. Zur allgemeinen Berechnung der Wurzeln τ niedriger Ordnung für große x ist man aber auf andere Methoden angewiesen. Hat man es mit den Poissonschen Zylinderfunktionen zu tun, ist also n ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$, so kann man die in den Paragraphen 11 bis 14 angedeutete graphische Methode benutzen, indem man die Schnittpunkte der Funktion $y = \operatorname{tg}(\tau_2 - \tau_1)\tau$ mit einer gewissen Funktion η bestimmt, die ebenfalls von τ_2, τ_1, τ abhängt. Die daselbst auf diese Weise gewonnenen Werte stimmen überein mit den Werten¹⁾ der Tab. 6. Zur numerischen Berechnung ist aber die Methode unbequem. Man kann jedoch z. B. die Gleichung (57) und die Gleichung (63) in anderer Weise graphisch auflösen, die sich besser zur Berechnung eignet. Ich verdanke diese Methode Hrn. Prof. Sommerfeld in Aachen, der sie mir brieflich mitteilte und mit dessen Zustimmung ich sie hier veröffentliche. Die Gleichung (63) in § 13, p. 122, lautet etwas anders geschrieben:

1) Bezüglich der Lage der ersten Wurzel für $n = \frac{1}{2}$ ist in § 14 ein Irrtum untergelaufen, der durch ein Versehen bei der Berechnung des Differentialquotienten von $y = 3x/(8-x^2)$ an der Stelle $x=0$ entstanden ist. Der positive Teil der Kurve η verläuft in Wirklichkeit ganz unterhalb der Kurve $y = \operatorname{tg} x$. Daher schneiden sie sich nicht, und der positive Zweig liefert keine Wurzel. Die erste Wurzel liegt vielmehr in der Nähe von $7\pi/4$ und ist nach Tab. 6 gleich 5,7637.

$$(63) \quad \operatorname{tg}(r_2 \tau - r_1 \tau) = \frac{r_2 \tau - r_1 \tau}{1 + r_2 \tau \cdot r_1 \tau}.$$

Setzt man

$$(84) \quad r_2 \tau = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{und} \quad r_1 \tau = \operatorname{tg} \beta,$$

so wird dieselbe

$$\operatorname{tg}(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$$

oder, indem man zu den Winkeln übergeht,

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \alpha - \beta + m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots),$$

was anders geschrieben lautet

$$(85) \quad \operatorname{tg} \alpha - (\alpha + m\pi) = \operatorname{tg} \beta - \beta.$$

Man braucht also nur die Kurven

$$(86) \quad \begin{cases} A(\tau) = \operatorname{tg} \alpha - (\alpha + m\pi), \\ B(\tau) = \operatorname{tg} \beta - \beta \end{cases}$$

zu zeichnen, was mit Hilfe genauer Tafeln für die Tangensfunktion leicht geschehen kann, und ihre Schnittpunkte zu bestimmen. $A(\tau)$ hat in dieser Darstellung unendlich viele Zweige; $B(\tau)$ nur einen, man könnte auch das Umgekehrte annehmen oder beiden Funktionen durch Hinzufügung ganzzahliger Vielfacher von π unendlich viele Zweige geben, ohne an dem Resultat etwas zu ändern. Sind r_1 und r_2 in Zahlenwerten gegeben, so nimmt man die Werte τ als Abszissen; ist jedoch nur das Verhältnis $r_2/r_1 = x$ ohne die Einzelwerte r_1 und r_2 gegeben, so nimmt man besser als Abszissen die Werte von $r_1 \tau$, indem man das willkürliche r_1 als Längeneinheit benutzt. In diesem Falle erhält man nicht direkt τ aus der Konstruktion, sondern die Wurzeln $r_1 \tau$, aus denen man aber mit Hinzunahme von x leicht den Wert $(r_2 - r_1) \tau$, um den es sich im wesentlichen handelt, ableiten kann. Denn es ist

$$x - 1 = \frac{r_2 - r_1}{r_1}, \quad \text{also} \quad (r_2 - r_1) \tau = r_1 \tau (x - 1).$$

Kraftlinienverlauf einiger Eigenschwingungen.

§ 21. Um ein Bild von dem Kraftlinienverlauf zu erhalten, der zu einer bestimmten durch p , τ , n gegebenen Schwingung im Innern des Ringes gehört, betrachten wir am bequemsten den Grenzfall eines unendlich wenig gekrümmten,

also geraden Rohres, in welches der Ring für $\kappa = 1$ (oder $q = \infty$) übergeht. In diesem Falle wird r mit Einschluß der Grenzen r_1 und r_2 unendlich, die Differenz $r - r_1$ bez. $q - q_1$ bleibt aber endlich, und die Besselschen Funktionen $J_n(q)$ und $K_n(q)$ gehen nach § 6 (p. 105 der ersten Mitteilung) über in:

$$\lim_{q=\infty} J_n(q) = \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \cos\left(q - \frac{2n+1}{4}\pi\right),$$

$$\lim_{q=\infty} K_n(q) = \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \sin\left(q - \frac{2n+1}{4}\pi\right).$$

Also wird nach (69)

$$(87) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{q=\infty} R = \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \frac{\sin(q - q_1)}{\sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi - q_1\right)} = a \sin(q - q_1) \\ \text{und durch Differentiation} \\ \lim_{q=\infty} R' = \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \frac{\cos(q - q_1)}{\sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi - q_1\right)} = a \cos(q - q_1), \end{array} \right.$$

wobei die neue Konstante a die Bedeutung hat

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi q}} \frac{1}{\sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi - q_1\right)}.$$

Es ist gestattet, diesen Ausdruck von a , obwohl er noch die Variable q unter der Quadratwurzel enthält, als konstant anzusehen, weil die Veränderung, welche das unendlich große q in dem endlichen Intervall von q_1 bis q_2 erfährt, gegen den Wert von q verschwindet. Der Faktor a , der wegen des unendlich großen q im Nenner im allgemeinen unendlich klein ist, kann, mit einer hinreichend großen Konstante A (Amplitudenkonstante des Gleichungssystems (68)) multipliziert, eine endliche Amplitude geben. Bei der Ableitung des Wertes $\lim_{q=\infty} R$ ist die näherungsweise Konstanz von a benutzt worden, man erhält dasselbe Resultat aber auch, wenn man zunächst in R die Funktionen $J_n(q)$ und $K_n(q)$ einzeln differenziert nach der für beide geltenden Formel

$$J'_n(q) = \frac{n}{q} J_n(q) - J_{n+1}(q)$$

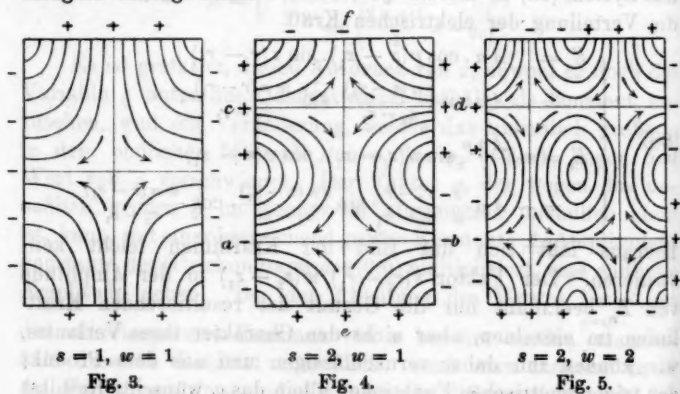
und dann erst zur Grenze $q = \infty$ übergeht. Man erkennt dabei, daß unser Resultat nur gilt, wenn n nicht auch unendlich wird.

Da wir nunmehr bloß trigonometrische Funktionen in den Ausdrücken für die elektrischen und magnetischen Kräfte haben, so ist die Bestimmung des Kraftlinienlaufes sehr vereinfacht. Die Wurzeln τ der Gleichung (41) werden ganzzahlige Vielfache von π , dividiert durch die Ringbreite $r_2 - r_1$. Das System (68) enthält aber noch die komplexe Exponentialgröße $\Theta = e^{ikt}$, durch deren Zerlegung in $\cos kt + i \sin kt$ man aus (68) zwei gleiche Systeme erhält, deren Phasen sich um $\pi/2$ voneinander unterscheiden. In jedem dieser Systeme hat außerdem, wie es sein muß, der magnetische Vektor die Phasenverschiebung $\pi/2$ gegen den elektrischen Vektor, so daß er gleich Null ist, wenn dieser seinen Extremwert hat. Wir betrachten zuerst den Kraftlinienverlauf in einem Querschnitt des Ringes, den eine durch die z -Achse gelegte Ebene herauschneidet; wir brauchen dazu nur den Schnitt mit der einen Ringhälfte, da in dem anderen das Bild ganz symmetrisch zu jenem ist. Nehmen wir einen Querschnitt, an welchem Φ seinen Maximalwert 1 hat, Φ' also Null ist, und wählen die Zeit t so, daß der elektrische Vektor sein Maximum besitzt, so gibt das System (68) in diesem Querschnitt zu der angegebenen Zeit die Verteilung der elektrischen Kraft

$$(88) \quad \begin{cases} E_z = A a \cdot \cos p(z - z_1) \cdot \sin \tau(r - r_1) \\ \quad = A a \cos \frac{s\pi(x - x_1)}{z_2 - z_1} \cdot \sin \frac{w\pi(r - r_1)}{r_2 - r_1}, \\ E_r = -\frac{A a p}{\tau} \sin p(z - z_1) \cdot \cos \tau(r - r_1) \\ \quad = -A a \frac{s}{w} \frac{r_2 - r_1}{z_2 - z_1} \sin \frac{s\pi(x - x_1)}{z_2 - z_1} \cdot \cos \frac{w\pi(r - r_1)}{r_2 - r_1}. \end{cases}$$

Hieraus läßt sich das Bild der Kraftlinien leicht konstruieren. Der Faktor $s(r_2 - r_1)/w(z_2 - z_1)$ in der Amplitude von E_r beeinflußt nur die Gestalt der resultierenden Kraftlinien im einzelnen, aber nicht den Charakter ihres Verlaufes, wir können ihn daher vernachlässigen und aus dem Produkt der trigonometrischen Funktionen allein das gewünschte Resultat ableiten. In diesem bestimmen die Größen s und w die Lage der Nullstellen und damit den Charakter des Kraftlinienbildes. Nehmen wir z. B. ein Rohr, dessen Höhe $z_2 - z_1$ zur Breite $r_2 - r_1$ im Verhältnis von 7:5 steht, so erhalten wir die Figg. 3—5 für die beigeschriebenen Wertepaare von s und w .

Der Rohrquerschnitt teilt sich in einzelne Rechtecke, die von singulären, geradlinigen Kraftlinien begrenzt werden. Jedes Rechteck mit den darin befindlichen Kraftlinien setzt sich durch Spiegelung in bezug auf seine Begrenzung in die angrenzenden Rechtecke fort, so daß man durch allmähliche Überdeckung des ganzen Querschnittes das Kraftlinienbild in demselben erhält, wenn man es in einem der Rechtecke kennt. Die Schnittpunkte der singulären Kraftlinien, welche die Rechtecke begrenzen, sind singuläre Punkte; an diesen ist die elektrische Kraft gleich Null und ihre Richtung ist unbestimmt. Bei den Schwingungen höherer Ordnung von $s=2$ und $w=2$ an erhält man Gebiete, in denen die Kraftlinien geschlossene Kurven sind und nicht mehr an den Rohrwänden endigen, wie Fig. 5 zeigt. Eine einzelne Schwingung dieser Art kann man jedenfalls nicht mit einem der bekannten Erreger elektrischer Schwingungen erzeugen, wohl aber ist es möglich, daß mehrere solcher Schwingungen mit verschiedenartigem Kraftlinienverlauf und zugehörigen Perioden durch Übereinanderlagerung ein Kraftlinienbild geben, das sich mit den gebräuchlichen Wellenerregern erzeugen läßt.



Unsere Fig. 3 zeigt ein ähnliches Kraftlinienbild wie die Fig. 12 bei R. H. Weber¹⁾, die dort der ersten Oberschwingung

1) R. H. Weber, l. c.; Habilitationsschrift p. 28; Ann. d. Phys. 8. p. 746. 1902.

eines Rohres mit kreisförmigem Querschnitt entspricht. Die Grundschiwingung hat daselbst (vgl. Fig. 2 auf p. 16 bez. 734.) einen Kraftlinienverlauf, dem bei unserem Rohr mit rechteckigem Querschnitt Kraftlinien entsprechen würden, die parallel den Wänden z_1 und z_2 , also in den Figg. 3–5 horizontal verlaufen. Dieser Fall tritt ein, wenn $s=1$ und $w=0$ ist; ganz analog würden für $s=0$ und $w=1$ die Kraftlinien vertikal und parallel den Wänden r_1 und r_2 verlaufen. Dies würden also die eigentlichen Grundschiwingungen sein. Für ein gerades Rohr, den Grenzfall des Ringes, den wir in diesem Paragraphen betrachten, sind beide zulässig, da keine Koordinate vor der anderen ausgezeichnet ist; für einen Ring mit endlicher Krümmung ist jedoch nur der Fall $s=0$, $w=1$ brauchbar, da die für unser Problem zulässigen Wurzeln τ der Gleichung (41) erst mit $w=1$ beginnen.

§ 22. Der Fall $w=0$, der für ein gerades Rohr gleichbedeutend ist mit $\tau=0$, würde auch bei einem Ringe dem Werte $\tau=0$ entsprechen, der eine singuläre Wurzel der Gleichung (41) $J_n(r_1, \tau) \cdot K_n(r_2, \tau) = J_n(r_2, \tau) \cdot K_n(r_1, \tau)$ darstellt. Man erkennt aber leicht, daß wir diesen Fall ausschließen müssen.

Nimmt man nämlich $\tau=0$ an, so ist nach Gleichung (38) in § 7 der ersten Mitteilung $h^2 \sigma^2 - p^2 = 0$, und man erhält zur Bestimmung der Funktion R aus Gleichung (13) nicht die Besselsche Differentialgleichung (18), die ohne Anwendung von ϱ lautet

$$(89) \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left[(h^2 \sigma^2 - p^2) - \frac{n^2}{r^2} \right] R = 0,$$

sondern die Gleichung

$$(89a) \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{n^2}{r^2} R = 0,$$

deren allgemeines Integral

$$c_1 r^n + c_2 r^{-n}$$

ist. Da außerdem Φ in diesem Falle die Form $e^{i p z} = e^{i h \sigma z}$ annimmt, so ergeben sich für die Funktionen B_r, B_z, B_φ , aus denen wir (vgl. §§ 3–5) die elektrischen und magnetischen Kräfte abgeleitet haben, Ausdrücke, welche mit den in § 4 diskutierten Zusatzgliedern identisch sind. Diese stellen also einen Spezialfall der allgemeinen Lösung mit Besselschen

Funktionen dar, sind aber, wie wir sahen, für unser Problem nicht brauchbar, weil man mit ihnen nicht die Grenzbedingungen an den Ringwänden erfüllen kann. Auf diese Weise fällt auch die Schwierigkeit weg, welche durch den Wert $\tau = 0$ im Nenner der elektrischen und magnetischen Kräfte entstehen würde.

Übertragen wir nun allgemein das Kraftlinienbild, das wir für den Grenzfall eines geraden Rohres erhalten haben, auf den Ring, so ist leicht einzusehen, daß der Charakter desselben sich dabei nicht ändert. Am deutlichsten wird dies, wenn man einen Ring nimmt, bei dem sich R für ein bestimmtes w auf $J_n(\rho)$ reduziert, einen Fall, den wir in § 19 behandelt haben. Die Funktion $J_n(\rho)$ hat eine der Sinuskurve nahekommende Gestalt, nur ist ihr Maximum von der Mitte zwischen zwei benachbarten Nullstellen nach dem kleineren Nullwert hin verschoben. Dasselbe gilt allgemein für die Funktion R , und man ersieht daraus, daß die Kraftlinien der Figg. 3—5 bei einem Ringe von endlicher Krümmung eine Verzerrung erleiden, indem sich der Schwerpunkt des Liniensystems nach der Innenwand r_1 des Ringes hin verschiebt und die Kraftlinien sich an dieser Wand zusammendrängen. Die Rechtecke, in welche sich der Querschnitt des geraden Rohres gliedert, ändern dabei natürlich ihre Dimensionen, sie bleiben aber Rechtecke.

In ähnlicher Weise, wie es für die $\bar{z}\bar{r}$ -Flächen geschehen ist, erhält man die Kraftlinienverteilung in den $\bar{r}\bar{\varphi}$ -Flächen, d. h. in Ebenen $z = \text{konst.}$, wo man die Komponenten E_r und E_φ hat; und dasselbe Verfahren gilt für die $\bar{\varphi}\bar{z}$ -Flächen, die bei einem Ringe Zylindermäntel, bei dem Grenzfall des geraden Rohres Ebenen sind. Die Figg. 6 u. 7 stellen für den Fall $s = 2$, $w = 1$ im Anschluß an Fig. 4 den Verlauf der Kraftlinien in den beiden zur z -Achse senkrechten Ebenen ($\bar{r}\bar{\varphi}$ -Flächen) dar, welche den Querschnitt des Rohres (vgl. Fig. 4) in den Geraden ab und cd schneiden. Fig. 8 gibt das zugehörige Bild in der $\bar{\varphi}\bar{z}$ -Fläche, welche den Querschnitt in der Geraden ef schneidet (Zylindermantel bei Ring, Ebene bei geradem Rohr). Alle drei gelten für die Umgebung des in Fig. 4 gezeichneten Querschnittes, an dem die Komponente $E_\varphi = 0$ ist, und den wir hier als $\varphi = 0$ bezeichnet haben. Die Kraftlinien sind in den für die Zeichnungen ausgewählten

singulären Flächen ebene Kurven, und bleiben es auch bei Übertragung auf den Fall des Ringes mit Ausnahme der

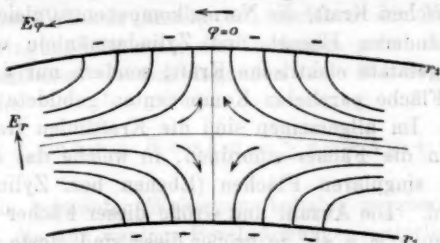


Fig. 6. Schnitt längs $a \dots b$ in Fig. 4. $s = 2, w = 1$.

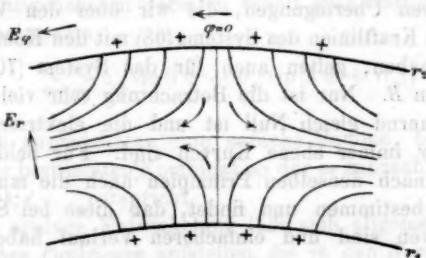


Fig. 7. Schnitt längs $c \dots d$ in Fig. 4. $s = 2, w = 1$.

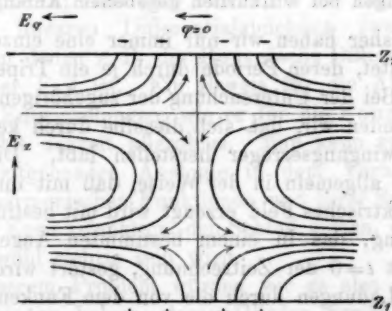


Fig. 8. Schnitt längs $e \dots f$ in Fig. 4. $s = 2, w = 1$.

Kurven in Fig. 8, da die ϕz -Fläche dabei zum Zylindermantel wird. Doch liegen die Kraftlinien alle auf dieser Mantelfläche, ohne aus ihr herauszutreten, sind also einfach

gekrümmt. Das gilt aber natürlich nur für die betrachteten singulären Flächen, an denen jedesmal die dritte Komponente der elektrischen Kraft, die Normalkomponente, gleich Null ist. In allen anderen Ebenen und Zylindermänteln erhält man nicht die gesamte elektrische Kraft, sondern nur die aus den zwei zur Fläche parallelen Komponenten gebildete Projektion derselben. Im allgemeinen sind die Kraftlinien Raumkurven, die sich in die Fächer einordnen, in welche das Rohrrinne durch die singulären Flächen (Ebenen bez. Zylindermäntel) geteilt wird. Die Anzahl und Größe dieser Fächer hängt von den Werten s, w, n ab; je größer diese sind, desto zahlreicher und kleiner sind die Fächer.

Dieselben Überlegungen, die wir über den Verlauf der elektrischen Kraftlinien des Systems (68) mit den Koeffizienten A angestellt haben, gelten auch für das System (70) mit den Koeffizienten B . Nur ist die Betrachtung sehr viel einfacher, weil E_z dauernd gleich Null ist und die elektrischen Kraftlinien daher immer ebene Kurven sind. Für beide Systeme kann man nach denselben Prinzipien auch die magnetischen Kraftlinien bestimmen und findet, daß diese bei System (68) ebene Kurven sind und einfacheren Verlauf haben als bei System (70).

Schwingungen bei willkürlich gegebenem Anfangszustand.

§ 23. Bisher haben wir nur immer eine einzelne Schwingung betrachtet, deren Periode durch je ein Tripel p, τ, n bestimmt ist. Bei der Untersuchung der zugehörigen Kraftlinienverteilung fanden wir, daß sich dieselbe durch keinen der bekannten Schwingungserreger herstellen läßt. Diese Erreger funktionieren allgemein in der Weise, daß mit ihrer Hilfe ein statisches elektrisches Feld erzeugt wird mit bestimmter Kraftlinienverteilung, das in einem bestimmten Augenblick, dem Anfangspunkt $t=0$ der Zeitrechnung, gestört wird, indem die elektrischen Ladungen durch die von dem Funken geschaffene Leitungsbahn sich auszugleichen beginnen. Unter geeigneten Umständen geschieht dies in der Form elektrischer Schwingungen. Wollen wir diesen Vorgang mit unseren Gleichungen mathematisch behandeln, so müssen wir auch den vorgeschriebenen Anfangszustand mit ihnen darstellen. Zu diesem Zweck

kann man eine Reihenentwicklung ansetzen, die der Fourierschen Entwicklung nach \sin und \cos der ganzzahligen Vielfachen eines Winkels analog ist, welcher die Periode der Grundschwingung bestimmt; die Vielfachen geben die Perioden der harmonischen Oberschwingungen an. Mit der Fourierschen Reihe

$$\sum_k A_k \sin k \psi + B_k \cos k \psi = \sum_k a_k \sin(k \psi + \vartheta_k)$$

läßt sich in bekannter Weise eine beliebig gegebene Funktion darstellen, die nur wenigen Beschränkungen unterliegt, welche bei physikalischen Funktionen nicht in Betracht kommen. Bei zweifach ausgedehnten Gebieten erhält man statt der einfachen eine Doppelsumme

$$\sum_i \sum_k a_{ik} \sin(i \psi + \vartheta_i) \sin(k \psi + \vartheta_k),$$

bei m -fach ausgedehnten eine m -fache Summe, bei der jedes Glied einer bestimmten Kombination der m ganzzahligen Reihenindizes $i, k, l \dots$ entspricht.

Eine analoge Entwicklung läßt sich allgemeiner mit den *harmonischen Funktionen* aufstellen, die in den *Normalfunktionen* bez. in den *ausgezeichneten Lösungen* eines Gebietes auftreten (vgl. § 11, p. 116), innerhalb dessen sie die Lösung einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung bilden¹⁾, von denen z. B. die Besselsche Differentialgleichung ein spezieller Fall ist. Ein Beweis für die Allgemeingültigkeit dieser Entwicklungen, wie er für die Fouriersche Reihe vorliegt, fehlt zurzeit allerdings. Man kann gegenwärtig nur aus der weitgehenden Analogie in dem Verhalten der allgemeinen harmonischen Funktionen und ihrer Spezialfälle, der Sinus- und Kosinusfunktion, den Schluß ziehen, daß diese Entwicklung wohl richtig sein wird.

In unserem Problem würden wir es also mit dreifachen Summen zu tun haben, deren Glieder gemäß (68) und (70) Produkte aus Zylinderfunktionen und den trigonometrischen Funktionen \sin und \cos sind. Diese Reihen müssen nach

1) Vgl. H. Weber, Partielle Differentialgleichungen II. § 23–30.

Wurzelvielfachen der transzendenten Gleichungen $Z=0$, $R=0$ (bez. $R'=0$), $\Phi=0$ fortschreiten, analog den Fourierschen Reihen, wo ja die Reihe der ganzen Zahlen 1, 2, 3 ... mit π multipliziert, nichts anderes ist als die aufeinander folgenden Wurzeln der Gleichung $\sin x = 0$. Jedes Glied entspricht einer bestimmten Kombination der Wurzeln p , τ , n und der Koeffizient desselben mag sich in ähnlicher Weise finden lassen, wie es bei dem zweidimensionalen Problem einer schwingenden ringförmigen Membran der Fall ist.¹⁾ Die wirkliche Berechnung der Koeffizienten kann aber nur erfolgen, wenn der Anfangszustand als Funktion der Koordinaten z , r , φ bekannt ist, etwa dadurch, daß $E_z^{(0)}$, $E_r^{(0)}$, $E_\varphi^{(0)}$, die elektrischen Kraftkomponenten zurzeit $t=0$, als Funktionen von z , r , φ gegeben sind. Im allgemeinen müssen wir sowohl System (68) als auch (70) benutzen, und das System der durch Summation entstehenden elektrischen und magnetischen Kräfte würde danach die Form haben:

$$(90) \quad \begin{cases} E_z = E_z^{(a)} + E_z^{(b)}, & M_z = M_z^{(a)} + M_z^{(b)}, \\ E_r = E_r^{(a)} + E_r^{(b)}, & M_r = M_r^{(a)} + M_r^{(b)}, \\ E_\varphi = E_\varphi^{(a)} + E_\varphi^{(b)}, & M_\varphi = M_\varphi^{(a)} + M_\varphi^{(b)}; \end{cases}$$

$$(90a) \quad \begin{cases} E_z^{(a)} = \sum_p \sum_\tau \sum_n A_{p,\tau,n} Z_p' R_\tau \Phi_n \Theta_k, \\ M_z^{(a)} = 0, \\ E_r^{(a)} = - \sum_p \sum_\tau \sum_n \frac{p}{\tau} A_{p,\tau,n} Z_p R_\tau' \Phi_n \Theta_k, \\ M_r^{(a)} = \sum_p \sum_\tau \sum_n \frac{\pi h}{\tau^2} A_{p,\tau,n} Z_p \frac{R_\tau}{r} \Phi_n' \Theta_k, \\ E_\varphi^{(a)} = - \sum_p \sum_\tau \sum_n \frac{p n}{\tau^2} A_{p,\tau,n} Z_p \frac{R_\tau}{r} \Phi_n' \Theta_k, \\ M_\varphi^{(a)} = - \sum_p \sum_\tau \sum_n \frac{h}{\tau} A_{p,\tau,n} Z_p' R_\tau' \Phi_n \Theta_k; \end{cases}$$

1) Vgl. hierzu z. B. Gray u. Mathews, l. c. p. 99 u. 100; ferner F. Pockels, l. c. p. 90ff.

$$(90b) \quad \left\{ \begin{aligned} E_z^{(b)} &= 0, \\ M_z^{(b)} &= \sum_p \sum_{\tau'} \sum_n B_{p, \tau', n} Z_p R_{\tau'} \Phi_n' \Theta_{k'}, \\ E_r^{(b)} &= - \sum_p \sum_{\tau'} \sum_n \frac{n k \sigma^2}{\tau'^2} B_{p, \tau', n} Z_p \frac{R_{\tau'}}{r} \Phi_n \Theta_{k'}, \\ M_r^{(b)} &= \sum_p \sum_{\tau'} \sum_n \frac{p}{\tau'} B_{p, \tau', n} Z_p' R_{\tau'} \Phi_n' \Theta_{k'}, \\ E_\varphi^{(b)} &= - \sum_p \sum_{\tau'} \sum_n \frac{h \sigma^2}{\tau'} B_{p, \tau', n} Z_p R_{\tau'} \Phi_n' \Theta_{k'}, \\ M_\varphi^{(b)} &= - \sum_p \sum_{\tau'} \sum_n \frac{p n}{\tau'^2} B_{p, \tau', n} Z_p' \frac{R_{\tau'}}{r} \Phi_n \Theta_{k'}. \end{aligned} \right.$$

Die oberen Indizes a und b bedeuten, daß die betreffende Größe aus dem System (68) bez. (70) entnommen ist, für die wir die Koeffizienten mit A und B bezeichnet haben. In den Gliedern mit dem Index b ist zur Unterscheidung τ' statt τ geschrieben und entsprechend k' statt k , da diese Größen in den beiden Systemen verschiedene Werte haben. Die p und n werden in beiden Systemen (a) und (b) ganz gleich, da die Funktionen Z und Φ bez. Z' und Φ' in genau derselben Verteilung in ihnen vorkommen; das τ des Systems (b) hat jedoch andere Werte, da es aus Gleichung (43) als Wurzel hervorgeht, während τ aus Gleichung (41) gewonnen wird. Die Größe k bez. k' ist in der aus (37), und (38) bekannten Art von p, τ, n abhängig.

Die Systeme (90a) und (90b) umfassen mehr Glieder als es scheint, da Θ noch die Form $e^{i t k}$ hat. Durch Zerlegung in $\cos k t + i \sin k t$ und Trennung des Reellen vom Imaginären erhält man sowohl aus System (a) wie aus System (b) zwei Systeme, deren Phasen sich um $\pi/2$ voneinander unterscheiden, in denen also immer $\sin k t$ und $\cos k t$ vertauscht erscheinen. Indem man den imaginären Teil nach Ersatz des Faktors i durch eine willkürliche reelle Konstante a bez. b zum reellen hinzufügt, erhält man wieder je ein einzelnes System, dessen Phase aber nunmehr vermittle der willkürlichen Konstante a (bez. b) ganz beliebig bestimmt werden kann, wodurch wir erst die für die Reihenentwicklung erforderliche Allgemeinheit erlangen. Denn in dieser müssen zur Darstellung des willkürlichen Anfangszustandes die einzelnen Schwingungen im allgemeinen verschiedene Phasen haben.

Im ganzen handelt es sich daher um die Übereinanderlagerung einer gewissen Anzahl von Systemen (68) mit je einer bestimmten Kombination p, τ, n und einer gewissen Anzahl von Systemen (70) ebenfalls mit je einer bestimmten Kombination des Tripels p, τ, n . Die Faktoren A in den korrespondierenden Gliedern der sechs Reihen E_z bis M_φ müssen dabei gleich sein, nämlich alle gleich $A_{p, \tau, n}$, da nur in diesem Falle die Maxwellschen Gleichungen erfüllt werden, indem diese sechs korrespondierenden Glieder für sich ein System von der Form (68) bilden. Das Analoge gilt von den Faktoren B , indem alle gleich $B_{p, \tau, n}$ sein müssen. Die Entwicklung der drei voneinander unabhängigen Anfangswerte $E_z^{(0)}$, $E_r^{(0)}$, $E_\varphi^{(0)}$ in Reihen unterliegt also in dieser Beziehung einer gewissen Beschränkung, indem die Koeffizienten korrespondierender Glieder der drei Reihen (a) sich immer verhalten müssen wie

$$1 : -\frac{p}{\tau} : -\frac{p n}{\tau^2},$$

die Koeffizienten der drei Reihen (b) dagegen wie

$$0 : -\frac{n h \sigma^2}{\tau^2} : -\frac{h \sigma^2}{\tau}.$$

Ob eine solche Entwicklung wirklich möglich ist, müßte erst besonders untersucht werden.

Unser dreidimensionales Problem unterscheidet sich von dem als Analogon angeführten zweidimensionalen einer schwingenden Membran, bei dem solche Schwierigkeiten nicht auftreten, wesentlich dadurch, daß bei letzterem nur eine einzelne Funktion zweier Variablen, die Verrückung eines Membranteilchens normal zu der Ebene, welche die Membran im Gleichgewichtszustand einnimmt, durch eine Doppelreihe darzustellen ist; hier dagegen haben wir drei unabhängige Funktionen $E_z^{(0)}$, $E_r^{(0)}$, $E_\varphi^{(0)}$ durch Reihen auszudrücken, deren Glieder noch durch die Maxwellschen Gleichungen miteinander verbunden sind, wodurch die Beschränkung der Koeffizientenwerte entsteht. In jenem Falle handelt es sich um die Darstellung einer skalaren Größe, hier um die Darstellung eines Vektors.

§ 24. Angenommen, die in Rede stehende Reihenentwicklung gilt, so kann man, ohne die Koeffizienten A und B im einzelnen zu berechnen, aus dem allgemeinen Verlauf der

Kraftlinien im Anfangszustand, d. h. aus dem Charakter der Funktionen $E_z^{(0)}$, $E_r^{(0)}$, $E_\varphi^{(0)}$, schon auf das Vorhandensein oder Fehlen gewisser Schwingungen oder Kombinationen p , τ , n

1. Erreger vertikal.

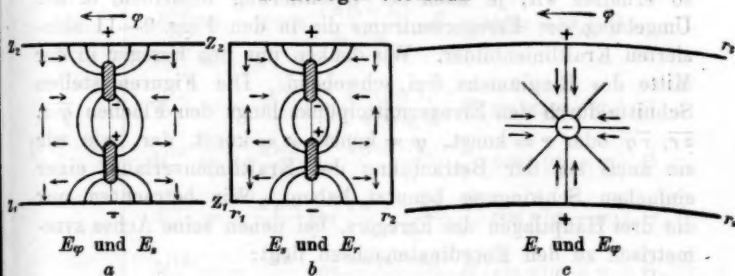


Fig. 9.

2. Erreger radial.

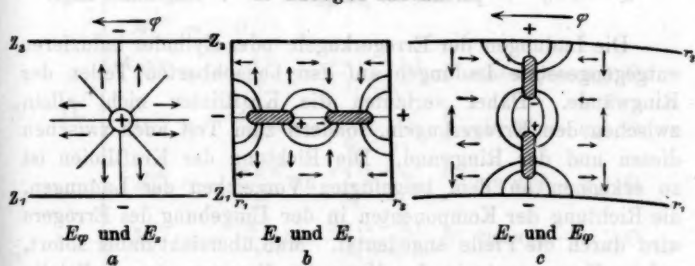


Fig. 10.

3. Erreger tangential.

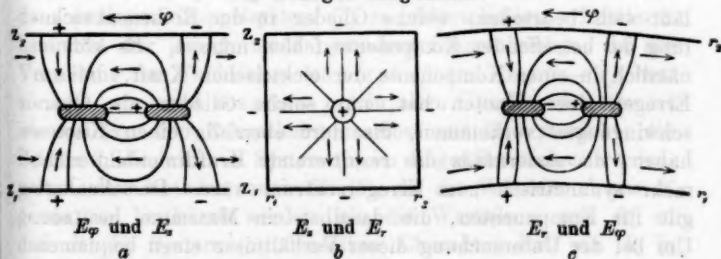


Fig. 11.

schließen. Der Kraftlinienverlauf wird durch die Form des Erregers bestimmt. Nehmen wir, um einen konkreten Fall zu haben, einen axialsymmetrisch gebauten Erreger, etwa einen linearen Hertzschen oder einen Righischen Kugeloszillator, so erhalten wir, je nach der Orientierung desselben, in der Umgebung des Erregerzentrums die in den Figg. 9—11 skizzierten Kraftlinienbilder. Wir denken uns den Erreger in der Mitte des Ringlumens frei schwebend. Die Figuren stellen Schnitte durch den Erregermittelpunkt längs den Flächen \overline{qz} , \overline{zr} , $\overline{r\varphi}$ oder $r = \text{konst.}$, $\varphi = \text{konst.}$, $z = \text{konst.}$ dar, wie wir sie auch bei der Betrachtung des Kraftlinienverlaufs einer einfachen Schwingung benutzt haben. Wir betrachten nur die drei Hauptlagen des Erregers, bei denen seine Achse symmetrisch zu den Koordinatenachsen liegt:

1. Erregerachse parallel der z -Achse . . . vertikale Lage
2. " radial . . . radiale "
3. " parallel der Ringachse . . . tangentielle Lage.

Die Ladungen der Erregerkugeln oder Zylinder induzieren entgegengesetzte Ladungen auf den benachbarten Teilen der Ringwände. Daher verlaufen die Kraftlinien nicht allein zwischen den Erregerkugeln, sondern zum Teil auch zwischen diesen und der Ringwand. Die Richtung der Kraftlinien ist zu erkennen an dem beigelegten Vorzeichen der Ladungen, die Richtung der Komponenten in der Umgebung des Erregers wird durch die Pfeile angedeutet. Man übersieht dabei sofort, welche Komponente in der Mitte des Erregers eine Nullstelle (Knoten) und welche einen Maximalwert (Bauch) hat; vor und hinter einer Nullstelle ist die Richtung entgegengesetzt. Danach läßt sich beurteilen, welche Glieder in der Reihenentwicklung der betreffenden Komponente fehlen müssen. Es können nämlich in einer Komponente der elektrischen Kraft, die am Erreger einen Knoten hat, nur solche Glieder als Oberschwingungen vorkommen, die dort ebenfalls einen Knoten haben, da andernfalls das resultierende Kraftlinienbild nicht mehr symmetrisch zum Erregerzentrum wäre. Das Analoge gilt für Komponenten, die daselbst ein Maximum besitzen. Um bei der Untersuchung dieser Verhältnisse einen bequemen Überblick zu haben, wollen wir das System (68) ausführlicher

mit Einsetzung der Werte von Z und Φ aus (69) hinschreiben; je nachdem wir $\Phi = \sin n(\varphi - \varphi_0)$ oder $\Phi = \cos n(\varphi - \varphi_0)$ einsetzen, erhalten wir zwei verschiedene Formen des Systems (68), die wir für verschiedene Lagen des Erregers benutzen müssen.

$$(91) \text{ I. } \left\{ \begin{aligned} E_s^{(a)} &= A \cos \frac{s\pi(z-z_1)}{z_2-z_1} \cdot R \cdot \sin n(\varphi - \varphi_0) \cdot \Theta, \\ M_s^{(a)} &= 0, \\ E_r^{(a)} &= -\frac{A p}{r} \sin \frac{s\pi(z-z_1)}{z_2-z_1} \cdot R' \cdot \sin n(\varphi - \varphi_0) \cdot \Theta, \\ M_r^{(a)} &= \frac{A n h}{r^2} \cos \frac{s\pi(z-z_1)}{z_2-z_1} \cdot \frac{R}{r} \cdot \cos n(\varphi - \varphi_0) \cdot \Theta, \\ E_\varphi^{(a)} &= -\frac{A p n}{r^2} \sin \frac{s\pi(z-z_1)}{z_2-z_1} \cdot \frac{R}{r} \cdot \cos n(\varphi - \varphi_0) \cdot \Theta, \\ M_\varphi^{(a)} &= -\frac{A h}{r} \cos \frac{s\pi(z-z_1)}{z_2-z_1} \cdot R' \cdot \sin n(\varphi - \varphi_0) \cdot \Theta. \end{aligned} \right.$$

$$(91) \text{ II. } \left\{ \begin{aligned} E_s^{(a)} &= A \cos \frac{s\pi(z-z_1)}{z_2-z_1} \cdot R \cdot \cos n(\varphi - \varphi_0) \cdot \Theta, \\ M_s^{(a)} &= 0, \\ E_r^{(a)} &= -\frac{A p}{r} \sin \frac{s\pi(z-z_1)}{z_2-z_1} \cdot R' \cdot \cos n(\varphi - \varphi_0) \cdot \Theta, \\ M_r^{(a)} &= \frac{A n h}{r^2} \cos \frac{s\pi(z-z_1)}{z_2-z_1} \cdot \frac{R}{r} \cdot \sin n(\varphi - \varphi_0) \cdot \Theta, \\ E_\varphi^{(a)} &= -\frac{A p n}{r^2} \sin \frac{s\pi(z-z_1)}{z_2-z_1} \cdot \frac{R}{r} \cdot \sin n(\varphi - \varphi_0) \cdot \Theta, \\ M_\varphi^{(a)} &= -\frac{A h}{r} \cos \frac{s\pi(z-z_1)}{z_2-z_1} \cdot R' \cdot \cos n(\varphi - \varphi_0) \cdot \Theta. \end{aligned} \right.$$

Der Vollständigkeit halber haben wir die Komponenten hier überall mit dem Index (a) versehen müssen, um sie von dem analogen Doppelsystem (b) zu unterscheiden. Letzteres brauchen wir jedoch nicht besonders hinzuschreiben, da die Verteilung der Funktionen $\sin p(z - z_1)$ und $\cos p(z - z_1)$ bez. $\sin n(\varphi - \varphi_0)$ und $\cos n(\varphi - \varphi_0)$ in allen Gliedern dieselbe ist wie bei (a) . Nur R erscheint daselbst mit R' vertauscht; die Schlüsse, die wir aus System (a) im folgenden ziehen werden, gelten aber trotzdem auch für (b) , da die Wurzeln τ' aus R' genau so bestimmt werden wie die Wurzeln τ aus R , so daß R' in System (b) denselben Charakter hat wie R in System (a) .

§ 25. Wir behandeln folgende drei Fälle:

- α) Vollring mit freiem Lumen,
- β) Halbring,
- γ) Vollring mit einer Querwand an der Stelle
 $\varphi = \varphi_0 + \pi$.

Schon in § 10 p. 114 sahen wir, daß im Falle 3 statt der Besselschen und Neumannschen Zylinderfunktionen mit ganzzahligen Indizes die Poissonschen Zylinderfunktionen mit gebrochenen Indizes auftreten können. Die Behandlung soll sich hier nun allgemein auf die möglichen Werte von p , τ , n oder, wenn man die Form von p und τ (vgl. (48) § 9 und (73) § 16) berücksichtigt, auf die Werte von s , w , n erstrecken. Man erkennt sofort, daß es für s und w gleichgültig ist, welchen der drei eben genannten Fälle (Vollring, Halbring und Vollring mit Querwand) man hat; nur die Werte von n werden davon beeinflusst, indem System 91 I und 91 II sich ja nur durch den Wert von Φ unterscheiden. Die folgende Zusammenstellung gilt also in bezug auf z und r für alle drei Fälle, in bezug auf φ müssen wir aber trennen und erhalten daher in der Abteilung C, die sich auf φ bezieht, die drei Unterabteilungen α), β) und γ).

A. Werte von s .

Es ist $p = s\pi/(z_2 - z_1)$, die Mittelebene des Ringes ist

$$z = \frac{z_2 + z_1}{2} = \frac{z_2 - z_1}{2} + z_1;$$

also wird in der Mittelebene, wo der Erregermittelpunkt liegt,

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad p(z - z_1) = \frac{s\pi}{2}.$$

Als Argumente der Funktionen

$$Z = \sin p(z - z_1) \quad \text{und} \quad Z' = \cos p(z - z_1)$$

haben wir also ganzzahlige Vielfache von $\pi/2$. Daraus ergibt sich:

1. Erreger vertikal: $s = 0, 2, 4 \dots$ (s gerade).

E_z hat am Erreger in bezug auf z ein Maximum (Bauch).

E_r und E_φ hat am Erreger in bezug auf z eine Nullstelle (Knoten).

E_z hat $\cos s\pi/2$ als Faktor, also muß $s = 0, 2, 4 \dots$ sein.

2. Erreger *radial*: $s = 1, 3, 5 \dots$ (s ungerade).

E_z hat am Erreger in bezug auf z eine Nullstelle.

E_r und E_φ hat am Erreger in bezug auf z ein Maximum.

E_z hat $\cos s\pi/2$ als Faktor, also muß $s = 1, 3, 5 \dots$ sein.

3. Erreger *tangential*: $s = 1, 3, 5 \dots$ (s ungerade).

E_z hat am Erreger in bezug auf z eine Nullstelle.

E_r und E_φ hat am Erreger in bezug auf z ein Maximum.

E_z gibt daher wie bei 2. die Werte $s = 1, 3, 5 \dots$

Dieselben Überlegungen gelten für die Werte von w in R , wenigstens für schwach gekrümmte Ringe, bei denen die Kraftlinienbilder in bezug auf r den soeben behandelten Bildern für z ganz ähnlich sind. Dies folgt sofort aus der Betrachtung des Grenzfalles unendlich kleiner Krümmung, den wir unseren Ausführungen in § 21 zugrunde gelegt haben. Die Resultate lassen sich auch auf stärker gekrümmte Ringe übertragen, wenn man den Erreger nicht mehr genau in der Mitte zwischen den Wänden r_1 und r_2 annimmt, sondern nach der inneren Wand hin verschoben. Für sehr stark gekrümmte Ringe oder zylindrische Räume aber verlieren diese Betrachtungen ihre Beweiskraft, da die Nullstellen der aus den beiden partikulären Integralen J_n und K_n gebildeten Funktion $R(r, \tau)$ für Werte $\tau_n^{(w)}$, welche verschiedenen w entsprechen, innerhalb des Intervalles r_1 bis r_2 nicht zusammenzufallen brauchen, wie es für unsere Betrachtungen notwendig und bei den trigonometrischen Funktionen erfüllt ist. Bei schwachen Krümmungen können die möglichen Abweichungen der verschiedenen Nullstellen voneinander und von der Lage des Erregerzentrums nur klein sein und sind zu vernachlässigen. Bei starken Krümmungen aber würden sie die Symmetrie stören, auf die unsere Beweisführung aufgebaut ist. Es ist daher wohl möglich, daß in diesem Falle bei der Auswahl der Reihenglieder in bezug auf R kompliziertere Verhältnisse herrschen, die eine besondere Untersuchung erfordern.

B. Werte von w .

Für schwach gekrümmte Ringe erhält man durch Einführung der Näherungswerte (87) für R und R' in die Gleichungen (91), da für die Krümmung 0 oder $\kappa = 0$

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} r^{(w)} = \frac{w \pi}{r_2 - r_1}$$

ist, ganz analog der bei s in A. befolgten Behandlungsweise:

1. Erreger *vertikal*: $w = 1, 3, 5 \dots$ (w ungerade).

E_r hat am Erreger in bezug auf r eine Nullstelle.

E_s und E_φ hat am Erreger in bezug auf r ein Maximum.

2. Erreger *radial*: $w = (0), 2, 4 \dots$ (w gerade).

E_r hat am Erreger in bezug auf r ein Maximum.

E_s und E_φ hat am Erreger in bezug auf r eine Nullstelle.

3. Erreger *tangential*: $w = 1, 3, 5 \dots$ (w ungerade).

E_r hat am Erreger in bezug auf r eine Nullstelle.

E_s und E_φ hat am Erreger in bezug auf r ein Maximum.

Es tritt jedesmal $\cos w \pi / 2$ als Faktor auf, wodurch man die angegebenen Resultate erhält.

C. Werte von n .

Hier müssen wir unterscheiden zwischen Vollring, Halbring und Vollring mit Querwand, je nachdem erhalten wir verschiedene Werte von n . Die Auswahl unter den Systemen (91 I) und (91 II) hängt ab von der Lage des Erregers zum Anfangspunkt der Winkelzählung φ_0 .

- a) Vollring: $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

Gemäß der Bedingung der Periodizität nimmt n nur ganzzahlige Werte an (vgl. § 10 p. 114); es sind alle ganzzahligen Werte zulässig, da keine Grenzbestimmungen bestehen, die dies hindern.

Erreger liege an der Stelle $\varphi = \varphi_0$.

1. Erreger *vertikal*: System II.

E_φ hat am Erreger in bezug auf φ eine Nullstelle.

E_s und E_r hat am Erreger in bezug auf φ ein Maximum.

2. Erreger radial: System II.

E_φ hat am Erreger in bezug auf φ eine Nullstelle.

E_z und E_r hat am Erreger in bezug auf φ ein Maximum.

3. Erreger tangential: System I.

E_φ hat am Erreger in bezug auf φ ein Maximum.

E_z und E_r hat am Erreger in bezug auf φ eine Nullstelle.

Ist speziell $\varphi_0 = 0$, liegt also der Erreger an der Stelle $\varphi_0 = 0$, so werden die Funktionen Φ und Φ' etwas einfacher und übersichtlicher $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$.

β) Halbring: n ganzzahlig.

Der Erreger soll in der Mitte zwischen den begrenzenden Querwänden liegen, an denen E_z und E_r einen Knoten (Nullstelle) haben müssen. Am einfachsten wird die Behandlung bei folgender Festsetzung:

Erreger liege bei $\varphi_0 = 0$, Querwände bei $\varphi = +\pi/2$ und $\varphi = -\pi/2$.

1. Erreger vertikal: System II, $n = 1, 3, 5 \dots$ (n ungerade).

E_z und E_r haben $\cos n\varphi$ als Faktor, also muß (an den Querwänden) $\cos n\pi/2 = 0$ sein.

2. Erreger radial: System II, $n = 1, 3, 5 \dots$ (n ungerade).

E_z und E_r haben wie bei 1. $\cos n\varphi$ als Faktor.

3. Erreger tangential: System I, $n = 0, 2, 4 \dots$ (n gerade).

E_z und E_r haben $\sin n\varphi$ als Faktor, also muß (an den Querwänden) $\sin n\pi/2 = 0$ sein.

Die Auswahl zwischen System I und II ist genau dieselbe wie bei dem Vollring.

γ) Vollring mit einer Querwand: n ganzzahlig oder gebrochen von der Form $n = \nu + \frac{1}{2}$, wo $\nu = 0, 1, 2, 3 \dots$ ist. Je nach der Lage des Erregers findet das eine oder andere statt.

a) Erreger um den Winkel $\pi/2$ von der Scheidewand entfernt: n ganzzahlig.

Dieser Fall entspricht genau dem Fall β) des Halbringes, an der Stelle der fehlenden zweiten Querwand liegen ebenfalls Knoten.

b) Erreger um den Winkel π von der Scheidewand entfernt:

Hierbei treten beide Formen von n auf. Am einfachsten wird auch hier die Behandlung durch die Festsetzung, daß man den

Erreger an die Stelle $\varphi = 0$ bringt und den Anfangspunkt φ_0 ebenfalls dahin verlegt. Also

Erreger liege bei $\varphi_0 = 0$, Querwand diametral gegenüber bei $\varphi = \pm \pi$.

1. Erreger *vertikal*: System II, $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots$

E_z und E_r haben $\cos n\varphi$ als Faktor, also muß (an der Querwand) $\cos n\pi = 0$ sein.

2. Erreger *radial*: System II, $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots$

E_z und E_r haben wie bei 1. $\cos n\varphi$ als Faktor.

3. Erreger *tangential*: System I, $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ (n ganzzahlig).

E_z und E_r haben $\sin n\varphi$ als Faktor, also muß (an der Querwand) $\sin n\pi = 0$ sein.

Bei tangentialer Erregerlage haben wir also dasselbe, als wenn, wie bei dem Vollringe in A., gar keine Querwand vorhanden wäre.

Die Ausführungen dieses Paragraphen geben nur Aufschluß darüber, welche Schwingungen bei gegebenem Anfangszustand überhaupt vorkommen können; welche von diesen aber merkbar in dem resultierenden Schwingungszustand enthalten sind, hängt von der speziellen Form des Kraftlinienverlaufs am Erreger ab, durch welche die Amplitudenkoeffizienten der einzelnen Partialschwingungen bestimmt werden. Die mathematische Behandlung eines konkreten Falles dürfte sehr schwierig sein; mehr Erfolg verspricht jedenfalls die experimentelle Untersuchung, die sich ja auf die Vorausberechnung der möglichen Schwingungsperioden stützen kann, womit ein gewisser Anhalt gegeben ist. Es erscheint sogar nicht ausgeschlossen, daß es experimentell gelingt, durch passend geformte Erreger gewisse Schwingungen so zu bevorzugen, daß ihre Amplitude die der anderen weit übertrifft. Bei der Übertragung unserer für ungedämpfte Schwingungen gültigen Resultate auf das Experiment muß man jedoch immer berücksichtigen, daß die experimentell realisierbaren Schwingungen wegen endlicher Leitfähigkeit der Metallwände räumlich, hauptsächlich aber zeitlich gedämpft sind infolge der schlechten Leitfähigkeit der Funkenstrecke bei den gebräuchlichen Erregern.

Übersicht über die Resultate.

§ 26. Im ersten gesondert veröffentlichten Teil dieser Arbeit wurde in den §§ 1—10 unter Benutzung von trigonometrischen und Zylinderfunktionen eine Lösung der Maxwell'schen Gleichungen aufgestellt, mit welcher sich elektrische Schwingungen in einem von metallischen Wänden gebildeten, mit Dielektrikum erfüllten Kreisring von rechteckigem Querschnitt darstellen lassen. Indem wir durch die Annahme unendlich großer Leitfähigkeit der Metallwände räumliche, und weiterhin auch zeitliche Dämpfung ausschlossen, konnten wir die vereinfachten Grenzbedingungen des Problems durch zwei Systeme elektrischer und magnetischer Kräfte (44a) und (45a) erfüllen, von denen jedes für sich eine unendliche Anzahl diskreter Schwingungsperioden besitzt. Für einige Spezialfälle eines Ringes mit einer meridionalen Querwand ($\varphi = \text{konst.}$) wurden in den §§ 11—14 Methoden zur Lösung der transzendenten Gleichungen angegeben, welche bei der Berechnung der Perioden auftreten.

Die hier vorliegende Fortsetzung gibt zunächst in den Gleichungen (68) und (70) die allgemeine Form der beiden Systeme elektrischer und magnetischer Kräfte, welche die Lösung des Problems ungedämpfter Schwingungen in dem betreffenden Kreisring bilden; sie behandelt dann in den §§ 17—20 ausführlich für verschiedene Werte von n die Wurzeln der transzendenten Gleichung

$$J_n(r_1 \tau) \cdot K_n(r_2 \tau) = J_n(r_2 \tau) \cdot K_n(r_1 \tau),$$

die zur Berechnung der Perioden des einen Systems nötig sind; gibt dann weiter (§§ 21 und 22) eine Darstellung des Verlaufs der elektrischen Kraftlinien in einigen Fällen und behandelt zuletzt die Schwingungen bei willkürlich gegebenem Anfangszustand, indem eine den Fourierschen Reihen analoge Reihenentwicklung, welche nach Wurzelvielfachen der transzendenten Bestimmungsgleichungen für die Perioden fortschreitet, angenommen und aus ihr die bei gegebenem Anfangszustand möglichen Schwingungsperioden abgeleitet werden.

Heidelberg, Physik. Institut der Univ., 2. Dez. 1905.

(Eingegangen 4. Dezember 1905.)

**6. Strahlungsmessungen an Resonatoren im
Gebiete kurzer elektrischer Wellen;¹⁾
von M. Paetzold.**

Einleitung.

Die von F. Kirchner²⁾ mitgeteilten Versuche über die optischen Eigenschaften entwickelter Lippmannscher Emulsionen hatten unter anderem das überraschende Resultat ergeben, daß sich die optischen Eigenschaften solcher Platten ändern, wenn sie angefeuchtet werden. Und zwar wurde beobachtet, daß sich bei nassen Platten das Absorptionsmaximum nach kleineren Wellenlängen verschob und der absolute Betrag der Absorption erheblich geringer wurde. Zur Erklärung dieses Verhaltens dachte sich Kirchner die in der Gelatine aufgeschwemmten Silberteilchen als Resonatoren wirkend und nahm an, daß sich ihre Eigenschwingungsdauer durch die infolge der Anfeuchtung erfolgte Vergrößerung ihrer Abstände verkleinere.

Diese Erklärung fand eine starke Stütze in der ungefähr gleichzeitig erschienenen theoretischen Arbeit von M. Planck.³⁾ Da indessen die Voraussetzungen der Planckschen Theorie bei den Kirchnerschen Versuchen nur zum geringen Teil erfüllt waren, so kann man ihre Ergebnisse auch nicht unbedingt als Beweis für die Kirchnerschen Erklärungen ansehen. Einen genaueren Aufschluß über diese Verhältnisse konnte man hingegen erwarten, wenn man die obenerwähnten Versuche in das Gebiet der elektrischen Schwingungen übertrug, weil man dann die zur Beurteilung der Vorgänge wesentlichen Größen, die Wellenlänge und Dämpfung der Resonatorschwingungen, auf verhältnismäßig einfache Weise messen konnte.

1) Auszug aus der gleichnamigen Leipziger Dissertation 1905.

2) F. Kirchner, Ann. d. Phys. 13. p. 268. 1904.

3) M. Planck, Sitzungsber. der k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 492. 1902.

In der Ausführung dieser Versuche bestand die Aufgabe der folgenden Arbeit.

Da zahlreiche notwendige und zeitraubende Hilfsuntersuchungen den Fortschritt der Arbeiten sehr verzögerten, sah ich mich schließlich infolge äußerer Verhältnisse genötigt, die Versuche vorzeitig abubrechen, ohne die mir gestellte Aufgabe vollständig gelöst zu haben.

1. Apparate und Versuchsanordnung.¹⁾

Der Strom von drei Akkumulatoren wurde über einen Widerstand und einen Quecksilber-Turbinenunterbrecher der Primärspule eines mittelgroßen Induktoriums zugeführt. Von den Klemmen der Sekundärspule führten zwei parallele, 4 bis 5 cm voneinander entfernte dünne Drähte zum Erreger, an dessen kugelförmigen Enden sie angelötet waren. Die Entfernung zwischen Erreger und Induktorium betrug ungefähr 2 m. Der Primärstrom des Induktoriums wurde durch den Widerstand auf einer Stärke von 1 Amp. gehalten. Die Zahl der Unterbrechungen war ungefähr 30 in der Sekunde.

Der geradlinige Erreger (Fig. 1) bestand aus zwei Messingstäben von 4 mm Durchmesser, an deren sich gegenüberstehenden Enden Kugeln von 6 mm Durchmesser angelötet waren, zwischen denen die Funken übersprangen. Die Stäbe waren durch die Deckel *aa* aus Hartgummi geführt, welche als Verschuß des kleinen, mit Petroleum gefüllten Glaszylinders dienten. Der eine Stab (der obere) war in dem Deckel leicht verschiebbar, der andere war fest; auf diese Weise konnte die Funkenstrecke ohne Mühe von Hand eingestellt werden. Die Führung der Zuleitungsdrähte ist aus der Figur ersichtlich.

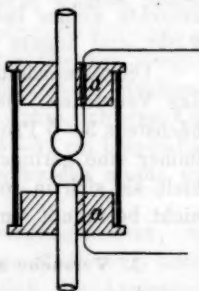


Fig. 1.

Zur Untersuchung der Strahlung dienten geradlinige Resonatoren, die nach Angaben von Klementiĉ aus dünnstem Eisen- und Konstantandraht hergestellt und nach dem Vor-

1) Die genauere Begründung der gewählten Anordnung ist in der Dissertation angegeben.

gange von Lebedew in einem luftverdünnten Raume eingeschlossen waren.

Die Empfindlichkeit eines solchen Resonators betrug bei 0,004 mm Luftdruck ungefähr das Dreifache gegenüber der bei Atmosphärendruck. Ein weiterer Vorzug dieser Resonatoren war der, daß sie nach einer Erwärmung durch oft notwendige Berührungen ziemlich rasch ihren ursprünglichen Zustand wieder annahmen, was bei Thermoelementen in Luft einen fünfmal so langen Zeitraum erforderte. Leider wurde das Vakuum allmählich immer schlechter, so daß sie nach mehreren Monaten ihre gesteigerte Empfindlichkeit fast vollständig eingebüßt hatten.

Als Meßinstrument wurde ein du Bois-Rubenssches Panzergalvanometer verwendet, das mittels einer Juliusschen Aufhängevorrichtung an den Wänden des Zimmers befestigt war. Die Normalempfindlichkeit des Instrumentes betrug 51, einem Ausschlag von 1 Skt. entsprach eine Stromstärke von $1,4 \cdot 10^{-9}$ Amp.

Um die Funkenstrecke des Erregers nicht zu schnell abzunutzen, wurden immer nur die ersten Ausschläge des Magnet-systems der Messung zugrunde gelegt. Der dadurch verursachte Fehler betrug bei einem Ausschlag von 300 Skt. erst 2 Skt. und konnte deshalb vernachlässigt werden.

Die Abweichungen der einzelnen Ausschläge betrugen bei den Versuchen, die im folgenden beschrieben werden sollen, höchstens 3—5 Proz. Bei längeren Versuchen wurde auch fast immer eine geringe Abnahme der Intensität beobachtet, doch hielt sie sich in solchen Grenzen, daß die Resultate dadurch nicht beeinflußt wurden.

2. Versuche mit einem induktiv erregten Oszillator.

Um möglichst reine und ungedämpfte Schwingungen zu erhalten, wurde der Versuch unternommen, einen induktiv erregten Oszillator herzustellen, ähnlich wie er nach dem Vorgange von F. Braun in der Funkentelegraphie benutzt wird.

Als geeignete Anordnung empfahl sich die von Blondlot angegebene (Fig. 2), einmal weil die Energieübertragung zwischen Primär- und Sekundärkreis eine verhältnismäßig gute ist, und zweitens, weil man annehmen konnte, der Primärkreis würde

wegen seiner geschlossenen Form keine Strahlung aussenden. Dem Primärkreise wurden Teslaschwingungen zugeführt. Die Abstimmung erfolgte in der Weise, daß an der mit *a* bezeichneten Stelle eine Leuchtröhre über die Paralleldrähte gelegt wurde. Dann wurde eine Brücke auf der Verlängerung der Drähte so lange verschoben, bis die Röhre die größte Helligkeit zeigte. Nun bestimmte man auf dieselbe Art den

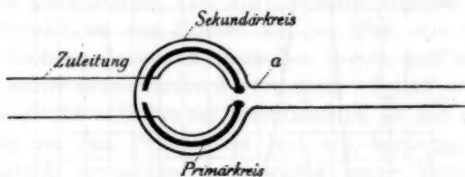


Fig. 2.

nächsten Schwingungsknoten, schnitt in der Mitte zwischen der Brücke und dem neu ermittelten Knoten die Drähte ab und bog sie vertikal zu der Ebene des Primärkreises auseinander. Dann war also die ganze Länge des Senders gleich einer halben Wellenlänge.

Die mit diesem Erreger aufgenommenen Kurven zeigten durchweg (Fig. 3) eine bedeutend weniger gedämpfte Schwingung, eine stärkere Intensität, die sich in weiten Grenzen steigern ließ, und eine recht befriedigende Regelmäßigkeit der Strahlung.

Als eine unerwünschte Erscheinung machte sich eine Ausbuchtung bei einer Resonatorlänge von 43—52 cm bemerkbar, die einem störenden Einfluß zugeschrieben werden mußte und deren Grund zunächst zu ermitteln war.

Gekoppelte Systeme von zwei Schwingungskreisen, mit denen wir es hier zu tun haben, sind von M. Wien¹⁾ untersucht worden. Es schien aber nicht, daß die Anwendung dieser Theorie hier zum Ziele führte. Dafür liegen die beiden Maxima zu weit auseinander und die Resonatorlänge, welche dem größeren entsprach, stimmte zu genau mit der Länge des vertikalen Strahlungsdrahtes überein. Man suchte daher das kleinere Maximum auf eine Einwirkung des Primärkreises

1) M. Wien, Wied. Ann. 61. p. 350. 1897.

zurückzuführen und bestimmte nach Entfernung des Sekundärkreises seine Eigenschwingungsdauer durch Aufnahme einer Resonanzkurve.

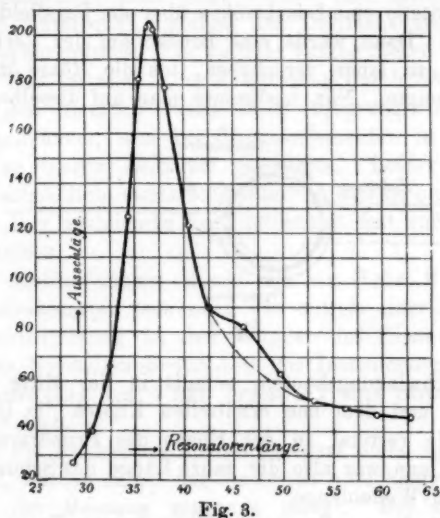


Fig. 3.

Aus Analogiegründen wurde angenommen, daß der Resonator zu einer solchen Messung wie bei einem Staboszillator in der Ebene des Erregers aufgestellt werden müßte, und man gab ihm deshalb eine horizontale Lage. Die bei dieser Anordnung aufgenommenen Kurven (Fig. 4, Kurve a) zeigten aber eine durchaus gleichmäßige Abnahme der Intensität bei Verkürzung des Resonators. Stellte man dagegen den Meßresonator wieder senkrecht zur Ebene des Primärkreises, also so wie in den früheren Versuchen auf, so erhielt man eine deutliche Resonanzkurve mit einem Maximum bei einer Resonatorlänge von 47 cm, d. h. gerade dort, wo sich in der ursprünglichen Kurve die störende Ausbuchtung befand (Fig. 4, Kurve b). Dabei mußte allerdings der Meßresonator dem Primär-

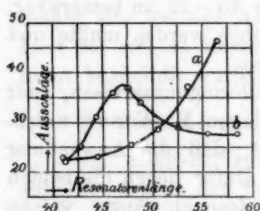


Fig. 4.

einer Resonatorlänge von 47 cm, d. h. gerade dort, wo sich in der ursprünglichen Kurve die störende Ausbuchtung befand (Fig. 4, Kurve b). Dabei mußte allerdings der Meßresonator dem Primär-

kreis bis auf ungefähr 20 cm genähert werden, wenn man ausreichend große Ausschläge erzielen wollte, während bei Anwesenheit des Sekundärkreises die Störung noch in Entfernungen von über 1 m deutlich beobachtet worden war. Man hätte nun annehmen sollen, daß sich das zweite Maximum durch metallische Abschirmung des Primärkreises würde beseitigen lassen. Aber weder dadurch noch durch Veränderung des Sekundärkreises konnte man diese Störung zum Verschwinden bringen. Schnitt man den Sender an der Brücke ab, so blieb das störende Maximum doch an derselben Stelle der Kurve, und nur seine Intensität wurde etwas dadurch verringert. Selbst wenn man den Sekundärkreis noch weiter verstümmelte, so daß nur noch die Schleife um den Primärkreis und ein horizontales Verlängerungsstück vorhanden war, wurde keine Verschiebung dieses Maximums wahrgenommen.

Auffallend war aber die Verschiedenheit der Ausstrahlung in verschiedenen Richtungen. Wurde der Sekundärkreis wieder

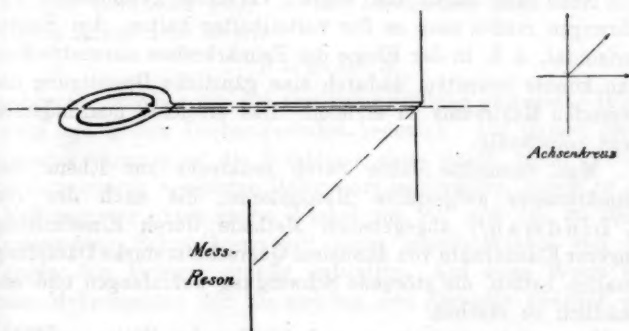


Fig. 5.

hergestellt, und der Resonator parallel zum Sender um diesen im Kreis um 90° bewegt, so wichen die erhaltenen Kurven erheblich voneinander ab. Stand der Resonator nämlich so, wie die Skizze (Fig. 5) in perspektivischer Darstellung zeigt, dann war das der Länge des Senders entsprechende Maximum bedeutend stärker ausgeprägt, das zweite dagegen fast ganz verschwunden.

Das überraschende Resultat all dieser Versuche läßt sich wohl auf folgende Weise verstehen:

Die Theorie kennt keine Schwingungen der elektrischen Kraft senkrecht zu einem ebenen Schwingungskreis. Wenn man also trotzdem mit einem auf der Ebene des Primärkreises senkrecht aufgestellten Meßresonator eine Resonanzkurve der Schwingung des Primärkreises aufnehmen konnte, so blieb nur die Vermutung übrig, daß durch die Annäherung eines zu jener Ebene senkrecht verlaufenden Leiters eine Drehung der Schwingungsebene herbeigeführt wird. Eine solche Drehung bewirkte demnach auch der Sender, welcher ja auch nur höchstens 20 cm vom Primärkreis entfernt war, und daher war es möglich, daß man auch in dem weit entfernten Meßresonator bei Anwesenheit des Sekundärkreises außer der Eigenschwingung des Senders noch eine nunmehr in derselben Ebene vorhandene, von dem Primärkreis beeinflusste Schwingung messen konnte.

Nach den durch die letzten Versuche gewonnenen Erfahrungen mußte man es für vorteilhafter halten, den Sender horizontal, d. h. in der Ebene des Primärkreises auszustrecken. Man konnte erwarten, dadurch eine gänzliche Beseitigung des störenden Maximums zu erzielen. Das erreichte man indessen nicht vollständig.

Man versuchte daher durch senkrecht zur Ebene des Primärkreises aufgestellte Resonatoren, die nach der von K. Lindman¹⁾ angegebenen Methode durch Einschaltung längerer Eisendrähte von dünnstem Querschnitt starke Dämpfung erhalten hatten, die störende Schwingung aufzufangen und unschädlich zu machen.

Das gelang auch in ganz befriedigender Weise, und bei Verwendung dieses Hilfsmittels dürfte der induktiv erregte Oszillator für manche Zwecke gute Dienste tun. Für die Versuche indessen, über welche hier berichtet werden soll, bedeuten diese gedämpften Resonatoren eine mögliche Fehlerquelle, deren Einfluß schlecht zu übersehen war. Man sah sich deshalb genötigt, wieder auf den Staboszillator zurückzugreifen, der bei verschiedenen Nachteilen doch den einen

1) K. Lindman, Ann. d. Phys. 7. p. 837. 1902.

Vorzug einer Schwingung von scharf bestimmter Wellenlänge aufwies.

3. Untersuchung der Strahlung von „Sekundärerregern“.

Man konnte sich nun der eigentlichen Aufgabe zuwenden und mit der Untersuchung der Strahlung eines oder mehrerer Resonatoren beginnen. In erster Linie sollte festgestellt werden, welche Veränderung die Schwingung jedes einzelnen Resonators durch gegenseitige Annäherung erfährt.

Das konnte durch Aufnahme von Resonanzkurven geschehen, aus denen nach den Angaben von V. Bjerknes¹⁾ Wellenlänge und Dämpfung einer Schwingung gleichzeitig bestimmt werden kann. Eine Methode, die Strahlung eines geradlinigen Resonators im Felde eines ebenfalls geradlinigen Erregers zu messen, ist von K. Lindman²⁾ angegeben worden. Er hatte beobachtet, daß die Erregung eines stabförmigen Meßresonators bei Drehung aus der vertikalen, dem Erreger parallelen Lage in die horizontale Lage um seine eigene Achse dem Gesetz

$$E = a \cos^2 \varphi$$

gehört; wobei a die bei vertikaler Stellung gemessene Intensität und φ den Drehungswinkel bedeutet. Auf Grund dieses Gesetzes konnte er die Strahlung eines durch einen Erreger in Schwingung versetzten Resonators beobachten, indem er den Meßresonator unter einem Winkel von 90° und den zu untersuchenden „Sekundärerreger“ unter einem Winkel von 45° gegen den Erreger geneigt aufstellte. Auf diese Weise war der Meßresonator der Einwirkung des Erregers gänzlich entzogen.

Bei einer derartigen Messung durfte man begreiflicherweise den Meßresonator nicht besonders weit von dem Sekundärerreger entfernen. Infolgedessen lag die Gefahr vor, daß zwischen beiden eine Kuppelung stattfände, welche die Versuchsergebnisse stören konnte. Deshalb wurde durch besondere Beobachtungen festgestellt, daß sich der Einfluß der Kuppelung im ungünstigsten Falle bis auf eine Entfernung von ca. 25 cm geltend machte,

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. 55. p. 136 u. 151. 1895.

2) K. Lindman, l. c. 7. p. 835. 1902.

ein Ergebnis, das bei den folgenden Versuchen wohl berücksichtigt wurde. Noch ein anderer Übelstand machte sich schon bei diesen ersten vorbereitenden Beobachtungen bemerkbar:

Die oben angegebene Meßmethode gründet sich auf die Voraussetzung einer geradlinig polarisierten Schwingung. Wenn diese Voraussetzung erfüllt gewesen wäre, so hätte nach dem erwähnten Gesetz bei $\varphi = 90^\circ$, d. h. bei Aufstellung des Meßresonators senkrecht zum Erreger ein Ausschlag gar nicht in Erscheinung treten dürfen. Tatsächlich konnte aber auch in dieser Stellung eine geringe Intensität gemessen werden, d. h. das Gesetz $E = a \cos^2 \varphi$ war nicht streng erfüllt. Wenn man trotzdem die vorher beschriebene Meßmethode benutzen wollte, so mußte man eigentlich die „störende Komponente“ berücksichtigen. Aus dieser Erwägung versuchte man ihre Phasenverschiebung gegenüber der regulären Komponente zu bestimmen und fand einen Verschiebungswinkel von 90° , wie ja auch nach theoretischen Erwägungen zu erwarten war,

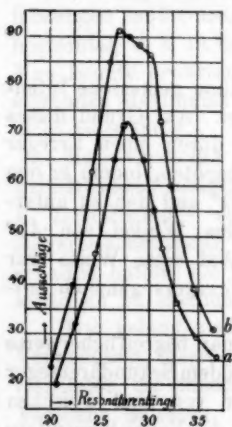


Fig. 6.

wenn man nicht eine weitgehende Störung der symmetrischen Anordnung des Erregers annehmen wollte.

Indessen war, wie schon erwähnt, die Intensität der störenden Komponente im Verhältnis zu der zu messenden Schwingung so gering, daß sie bei der geplanten Messungsart vernachlässigt werden konnte.

Nach Erledigung dieser Vorversuche konnte man an die Aufnahme von Resonanzkurven für die Strahlung von Sekundärerregern nach der oben beschriebenen Methode gehen. Man begann mit einem einzelnen, 1 mm starken stabförmigen Resonator und erhielt scharf ausgeprägte Kurven, welche zur Ermittlung von Dämpfung und Periode wohl dienen konnten (Fig. 6, Kurve a). Aber schon, wenn man auch nur einen genau gleichen Resonator dem ersten bis auf ca. 1 cm näherte, verloren die Kurven ihre charakteristische Gestalt (Fig. 6,

Kurve b). Es zeigte sich, daß die Versuche nicht genau genug waren, um die nach M. Wien und Drude zu erwartenden zwei nahe aneinanderliegenden Maxima aufzuweisen. Auch eine Verschiebung des Maximums trat nicht ein; die Kurve zeigte lediglich eine Verbreiterung des Maximums bei Annäherung der Resonatoren.

Für das Verhalten eines räumlichen Resonatorensystems war demnach gleichfalls ein scharfes Absorptionsmaximum bei weiter Aufstellung der Resonatoren, ein verbreitertes bei engerer Anordnung zu erwarten. Versuche über das Verhalten solcher aus einer größeren Zahl von Resonatoren bestehenden Systeme sind in den folgenden beiden Abschnitten enthalten.

4. Durchgang elektrischer Wellen durch räumliche Resonatorensysteme.

Man stellte ein Resonatorensystem in der Weise her, daß man in einem leichten Holzrahmen in mehreren Reihen eine große Zahl von geraden und gleichlangen Kupferdrähten von 1,5 mm Durchmesser und 18 cm Länge in gleichen Abständen parallel zueinander befestigte, so daß sie als ganzes für die durchgehenden Wellen eine „inhomogene ebene Schicht“ bildeten. Dieses System wurde rings mit einem großen Blechschirm umgeben und in den Gang der Strahlen des Erregers eingeschaltet. In größerer Entfernung hinter ihm (ca. 1 m) wurde der Meßresonator, ebenso wie der Erreger und die Resonatoren des Systems, vertikal aufgestellt. Dann konnte man annehmen, daß mit dem Thermoelement nur der Teil der Strahlung des Erregers gemessen wurde, welcher durch das Resonatorensystem gegangen war.

Wenn man nun für dieses System Absorptionskurven bei 1 cm und bei 2 cm weitem Abstand der Resonatoren aufnahm, so hätte man in beiden Kurven ein deutliches, aber flaches Absorptionsmaximum in der Nähe der Eigenwellenlänge der Resonatoren erwarten sollen.

Die Versuche wurden in der Weise ausgeführt, daß man aufeinander abgestimmte Erreger und Meßresonatoren von verschiedener Periode verwandte und für jede Wellenlänge den Prozentsatz der vom System absorbierten Energie bestimmte.

Dazu wurde zunächst die Erregung des Meßresonators bei freier Strahlung gemessen, darauf wurde das Resonatorensystem eingeschaltet und nun die Erregung des Meßresonators bestimmt; schließlich wurde als Kontrolle der erste Versuch noch einmal wiederholt. Wenn man die durch den zweiten Versuch gemessene Intensität von dem Mittelwert der durch den ersten und dritten Versuch ermittelten abzieht und drückt diese Differenz in Prozenten der Intensität bei freier Strahlung aus, so erhält man eine Zahl, welche für die verschiedenen Wellenlängen in Vergleich gezogen werden kann.

Die Versuche hatten ein überraschendes Resultat, insofern der Verlauf der Kurven durchaus den Erwartungen widersprach.

Hatte man angenommen, daß die Erregung des Meßresonators bei Übereinstimmung der Eigenwellenlänge der Elemente des Resonatorensystems mit der auffallenden Wellenlänge ein Minimum sein werde,

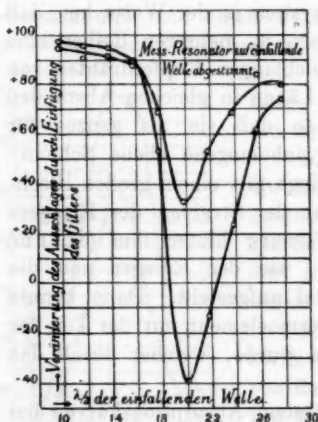


Fig. 7.

so zeigte der Versuch im Gegenteil eine Stärke der Erregung an, welche zwischen dem Minimum und einem Maximum, näher aber dem Maximum lag, das sogar oft größer war, als wenn das Resonatorensystem nicht eingeschaltet war (Fig. 7).

Gerade die letztgenannte Wirkung des Gitters mußte den Gedanken nahelegen, daß man es bei diesen Versuchen garnicht, wie bisher angenommen worden war, mit Absorptionerscheinungen zu tun hatte. Denn eine Verstärkung der Erreger-

wirkung konnte man sich nur dadurch erklären, daß man eine im Meßresonator wirksame Strahlung der Elemente des Gitters annahm. Dann konnte, während bei freier Strahlung nur die unmittelbar am Meßresonator vorbeiführende Welle zur Wirkung kam, nach Einschaltung des Resonatorensystems durch Vermittelung der seitlich aufgestellten Resonatoren ein be-

deutend größerer Teil der Strahlung des Erregers auf den Meßresonator einwirken.

Gegen diese Erklärung sprechen allerdings Versuche, welche von Garbasso¹⁾ und später von Aschkinass und Schäfer²⁾ in ähnlicher Weise ausgeführt und als Absorptionsmessungen ausdrücklich angesprochen worden waren. Und man mußte diesen Versuchen umsomehr Bedeutung beilegen, als sie bisher unwiderlegt geblieben sind, obwohl sie mit den jetzt allgemein anerkannten theoretischen Ansichten über derartige Vorgänge keineswegs im Einklang stehen. Es erschien deshalb von Interesse, die Versuche von Aschkinass und Schäfer als die neueren und wegen der besseren Beobachtungsmittel auch beweiskräftigeren zu wiederholen. Hatte man erst ein sicheres Urteil über diese Versuche gewonnen, so konnte man leicht entscheiden, ob die Erklärung der zuletzt beschriebenen Versuche durch die Wirkung der Eigenstrahlung der Gitterelemente berechtigt war oder nicht.

5. Durchgang elektrischer Wellen durch Resonatorensysteme, die in einer Ebene angeordnet sind.

Aschkinass und Schäfer stellen sich bei ihren Versuchen auf den Standpunkt von Garbasso, der durch die in der erwähnten Arbeit beschriebenen Experimentaluntersuchungen bewiesen zu haben glaubte, daß ein Hertzscher Erreger ein „kontinuierliches Spektrum“ der verschiedensten Wellenlängen aussende, und daß daher ein System von Resonatoren die Strahlung in um so geringerem Maße durchließe, „je besser ihre Eigenperiode mit der Schwingungsdauer des zur Beobachtung dienenden Empfängers übereinstimme“.

Im Gegensatz zu den im vorigen Abschnitt beschriebenen Resonatorensystemen benutzten Aschkinass und Schäfer solche, die nur in einer Ebene sich ausdehnten. Um nun einen etwaigen Einfluß einer solchen Veränderung in der Anordnung der Resonatoren zu ermitteln, wurde ein Versuch in der schon früher beschriebenen Art mit einem „Gitter“ ausgeführt, das auf folgende Weise hergestellt war.

1) A. A. Garbasso, Journal de physique 2. p. 259. 1893.

2) E. Aschkinass u. Cl. Schäfer, Ann. d. Phys. 5. p. 490. 1901.

Auf einer großen Tafel aus dünnem, auf einen Holzrahmen gespannten Papier waren 18 cm lange und 1,5 cm breite Stanniolstreifen aufgeklebt. Sie waren in fünf Reihen übereinander angeordnet, jede Reihe zu 14 Elementen. Der Abstand zwischen den einzelnen Elementen betrug 8 cm. Es wurden Erreger mit Wellenlängen von 51 cm bis herab zu 19 cm und auf diese abgestimmte Meßresonatoren benutzt.

Als Ergebnis der Versuche wurde, wie früher, eine starke Abhängigkeit der „Absorption“, wenn wir diese Ausdrucksweise zunächst beibehalten wollen, von der auffallenden Wellenlänge gefunden. Und zwar nahm sie mit abnehmender Wellen-

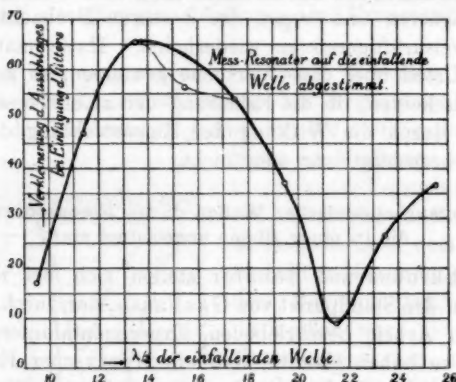


Fig. 8.

länge bis zu einem Minimum bei 43 cm ab und stieg dann wieder bis zu einem Maximum bei 27 cm, um danach steil abzufallen (Fig. 8).

Dieses Resultat stimmt im wesentlichen mit den im vorigen Abschnitt angegebenen Messungen überein, ist aber mit denen von Aschkinass und Schäfer in keiner Weise in Einklang zu bringen, da nach ihren Anschauungen und Versuchen ein deutliches Maximum der Absorption bei einer Wellenlänge von 36 cm, d. h. wenn Meßresonator und die Elemente des Gitters in Resonanz sind, hätte hervortreten müssen. Zur Aufklärung dieses Widerspruches wurde die Versuchsanordnung zunächst der von Aschkinass und Schäfer nach Möglichkeit angepasst.

Es wurde daher nach ihren Angaben die Strahlung eines Rubensschen Erregers¹⁾ zunächst durch ein Gitter polarisiert; die Strahlung trat dann durch eine größere, runde, mit Petroleum gefüllte Flasche und traf in einiger Entfernung auf das ebenfalls genau nach den Angaben der erwähnten Arbeit hergestellte Resonatorensystem. Nach diesem ging die Strahlung durch eine als Diaphragma benutzte Zinktafel und fiel endlich auf einen Hohlspiegel, der den Meßresonator umgab.

Auch die Versuchsausführung wurde, abweichend von der bisher benutzten, genau nach den Angaben von Aschkinass und Schäfer vorgenommen. Erreger (2,5 cm lang) und Meßresonator (5 cm lang) blieben konstant, nur die Resonatorenlänge des dazwischen gestellten Gitters wurde geändert.

Bei dieser Anordnung ergab der Versuch tatsächlich das den Anschauungen von Garbasso entsprechende Maximum der „Absorption“ bei einer Länge der Gitterelemente von 5 cm (Fig. 9, a).

Wenn man nun an Stelle des 5 cm langen Meßresonators einen solchen von 7 cm benutzte, so mußte man nach Garbasso, Aschkinass und Schäfer erwarten, daß nun das Absorptionsmaximum eintreten würde, wenn die Resonatoren des Gitters ebenfalls 7 cm lang wären, also eine Wellenlänge von ca. 14 cm hätten.

Der Versuch bestätigte die Erwartung nicht. Der Verlauf der Absorption in dem gemessenen Gebiete

der Wellenlängen von 20 cm bis 4 cm der Gitterelemente, war zwar geändert, das Maximum der Absorption war aber ungefähr an derselben Stelle geblieben und war nur noch deutlicher ausgeprägt (Fig. 9, b). Auch ein Versuch mit einem 10 cm langen Meßresonator zeigte noch das starke Maximum der Absorption bei einer Gitterresonatorenlänge von 5 cm, dagegen kein Ansteigen für die Länge von 10 cm.

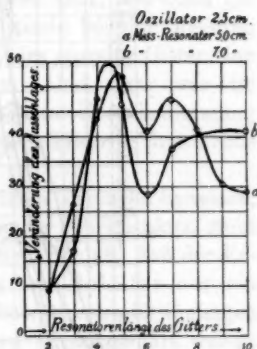


Fig. 9.

1) H. Rubens, Zeitschr. f. d. physik. u. chem. Unterr. 10. p. 239. 1897.

Nach der von Garbasso vertretenen Theorie der Strahlung eines Erregers kann eine Veränderung seiner Dimensionen keinen Einfluß auf die Lage des Absorptionsmaximums haben. Ein Versuch bewies das Gegenteil. Wurde der Erreger 5 cm (anstatt 2,5 cm) lang gemacht, so trat bei Untersuchung mit

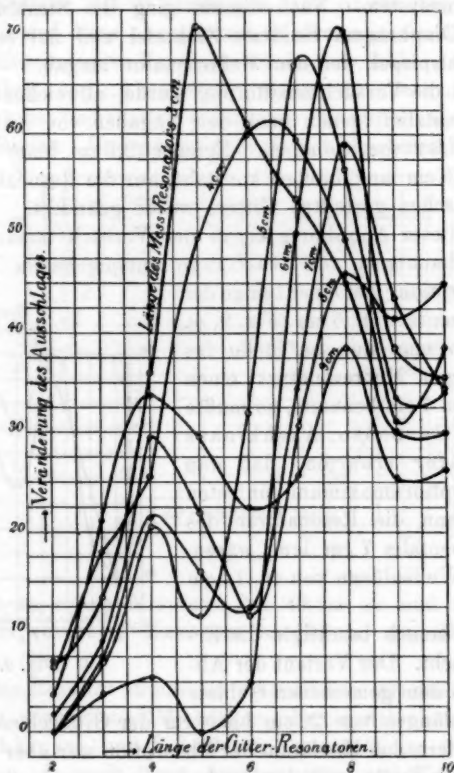


Fig. 10.

9, 8, 7 und 6 cm langen Meßresonatoren ein starkes Absorptionsmaximum bei einer Gitterresonatorenlänge von 8 cm, ein schwächeres bei 4 cm ein. Bei Untersuchung mit kleineren Resonatoren verschwand das geringere Maximum und das starke verschob sich nach kleineren Gitterwellenlängen herab

(Fig. 10), doch entsprach auch hier die Verschiebung nicht der Abnahme der Wellenlänge des Meßresonators.

Die Erscheinung des zweiten, kleineren Maximums muß man vermutlich mit dem Auftreten von Oberschwingungen in den Resonatoren in Zusammenhang bringen.

Wie die Verfasser in ihrer Arbeit ausdrücklich erwähnen, muß nach den Anschauungen von Garbasso das Absorptionsmaximum bei derselben Wellenlänge stattfinden, ob man das Gitter konstant läßt und die Länge des Meßresonators verändert, oder ob man dem Meßresonator dauernd dieselbe Länge gibt, die vorher die einzelnen Elemente des Gitters hatten, und die Resonatoren im Gitter verändert; auch diese Folgerung ließ sich nicht bestätigen, wie schon ein Vergleich der Kurven der Fig. 10 untereinander ergibt. Während bei der Messung mit veränderlichem Gitter das Absorptionsmaximum bei Gebrauch verschieden langer Meßresonatoren sich, wie oben gezeigt wurde, fast gar nicht verschob, wurde bei der Messung mit veränderlichem Meßresonator für jedes einzelne Gitter eine andere Lage des Maximums gefunden. Und zwar war die Richtung seiner Verschiebung allerdings in Übereinstimmung mit den Forderungen der Garbassoschen Theorie, ihre Größe aber keineswegs.

Die negativen Erfolge der drei letzten Versuche beweisen, daß die Anschauungen von Garbasso der Wirklichkeit nicht entsprechen und zwingen deshalb zu dem Schluß, daß der Erfolg des Versuches von Aschkinass und Schäfer nur ein scheinbarer ist, der nicht durch die theoretischen Erwägungen erklärt werden kann, auf Grund deren er ausgeführt wurde.

Es wurde nun zunächst untersucht, ob irgendwelche Störungsquellen vorhanden seien, oder ob die Ergebnisse durch die Wirkung der Resonatoren allein bedingt wären.

Aber weder die Entfernung des Polarisationsgitters, noch die Veränderung der Dimensionen der Öffnung im Schirm, noch die Beseitigung des Reflektors am Meßresonator konnte den Charakter der aufgenommenen Kurven verändern. Man mußte also ohne Frage die Ursache für die Erscheinung in Vorgängen suchen, die sich im Gitter selbst abspielten.

Bei den Versuchen mit konstantem Meßresonator ist das veränderliche Gitter vielleicht selbst eine Störungsquelle. Denn

obwohl sich die einzelnen Gitter infolge der Anordnung ihrer Elemente in Abständen, die proportional ihrer Wellenlänge sind, wohl ohne Fehler miteinander vergleichen lassen, so können doch bei ihrer Anordnung vor der Schirmöffnung, namentlich bei den Gittern mit größeren Resonatoren, Ungleichmäßigkeiten entstehen, die das Aussehen der Absorptionskurven beeinflussen. Die Versuche sind deshalb später immer mit konstantem Gitter und veränderlichem Meßresonator ausgeführt worden. Aber auch dann traten keine einfachen Verhältnisse auf.

Bisher war immer angenommen worden, daß die Wellenlänge der Resonatoren im Gitter dieselbe sei, wie wenn sie einzeln schwingen. Nun ist es aber, wie schon früher bemerkt, sehr wohl denkbar, daß ihre gegenseitige Annäherung eine Vergrößerung der Dämpfung und infolge davon eine Änderung ihrer Schwingungsdauer herbeiführt. Es wäre also möglich, daß die Gitterelemente ebenfalls Schwingungen von einer anderen Periode ausführen, als ihrer geometrischen Gestalt entspricht, und daß man auf diese Weise zu einer Erklärung der Versuche gelangen könnte.

Bei der „Untersuchung der Strahlung von Sekundärerregern“ hatten allerdings derartige Messungen wegen der Ausbildung von zwei und mehr Schwingungen zu keinem Resultat geführt. Hier aber konnte man hoffen, daß diese Störungen wegen der größeren Entfernung zwischen den Resonatoren nicht eintreten würden und daß deshalb eine Wiederholung der in dem genannten Abschnitt beschriebenen Versuche zu einem Erfolge führen würde. Es fragte sich nur, ob die Intensität der Strahlung des Gitters stark genug wäre, um eine solche Messung zu gestatten, da die Wellenlängen verhältnismäßig klein waren. Deshalb wurde, um die Wirkung zu konzentrieren, eine runde Flasche mit Petroleum hinter dem Gitter aufgestellt. Wenn man dann, ebenso wie im Abschnitt 3 angegeben ist, das Gitter unter 45° , den Meßresonator unter 90° gegen den Oszillator geneigt aufstellte, so gelang es gut, die Versuche auszuführen.

Solange die Abstände zwischen den Resonatoren dieselben waren wie bei den bis jetzt beschriebenen Versuchen, zeigten die Gitter die Schwingung an, welche der Länge der einzelnen

Resonatoren entsprach. Näherte man aber die Elemente einander noch mehr, z. B. von 6 cm auf 4 cm, so zeigte sich tatsächlich sehr oft eine Verschiebung des Maximums der Resonanzkurve und zwar nach der Seite der kürzeren Wellenlängen hin: das bedeutete also, daß durch Zusammendrängung der Resonatoren die Wellenlänge der Elemente kleiner wurde.

Eine solche Veränderung der Schwingungsdauer konnte in der Hauptsache nur von der durch die Annäherung veränderten Kapazität der Elemente herrühren. Diese mußte eine Vergrößerung erfahren, wenn zwei mit entgegengesetzter Elektrizität belegte Enden einander genähert wurden, und eine Verkleinerung bei Annäherung zweier mit gleichnamiger Elektrizität belegter Enden. Wenn man also einmal eine Annäherung nur in der einen und dann nur in der anderen Richtung vornahm, so mußte man Kurven erhalten, die eine von der Schwingungsdauer eines einzelnen Elementes in entgegengesetztem Sinne abweichende Periode anzeigten. Ein solches Verhalten konnte aber durch den Versuch nicht festgestellt werden.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit „Über die selektiven Eigenschaften von Resonatoren“¹⁾ hat Cl. Schäfer ganz ähnliche Beobachtungen veröffentlicht. Er fand bei dichter Anordnung der Resonatoren meist eine Abnahme der Wellenlänge, teilweise aber auch, im Gegensatz zu den oben mitgeteilten Resultaten, eine Zunahme. Er führte die Erscheinung ebenfalls auf die bei Zusammendrängung der Resonatoren veränderte Kapazität der einzelnen Elemente zurück und *bestätigt* diese Anschauung durch ganz ähnlich angelegte Untersuchungen, wie sie oben angegeben sind. Der Unterschied zwischen beiden liegt nur in der Ausführung. Während bei den oben geschilderten Messungen die Schwingungsdauer direkt bestimmt wurde, stellt sie Cl. Schäfer aus den Absorptionskurven fest, indem er die Voraussetzung macht, daß ein Maximum der Absorption eintritt, wenn die Eigenwellenlänge der Resonatoren mit der Wellenlänge der einfallenden Schwingung übereinstimmt.

Nun haben aber schon unsere bisherigen Versuche gezeigt, und die noch folgenden werden es bestätigen, daß bei Anord-

1) Cl. Schäfer, Ann. d. Phys. 16. p. 106. 1905.

nungen, wie sie ganz ähnlich auch Cl. Schäfer benutzt hat, eine reine Absorptionswirkung nicht eintritt, und daß die Bestimmung der Wellenlänge der Resonatoren aus einer solchen vermeintlichen Absorptionskurve leicht zu Irrtümern Anlaß geben kann. Aus diesem Grunde kann man die Resultate der Schäferschen Arbeit nicht als ganz einwandfrei bezeichnen.

Die vorhin beschriebenen Versuche gewährten noch einen anderen, unerwarteten Einblick in die bisher so unklaren Verhältnisse: War zunächst befürchtet worden, daß man die Resonanzkurven wegen zu geringer Intensität der Strahlung nicht würde aufnehmen können, so zeigten die Versuche im Gegenteil eine überraschend starke Strahlung an; und da bei der benutzten Anordnung, wie aus dem früher angegebenen Gesetz ($E = a \cos^2. \varphi$) hervorgeht, im Meßresonator sich nur ein Viertel der Intensität geltend machte, welche bei der Anordnung der zu erklärenden Versuche vom Gitter auf ihn übertragen wurde, so war klar, daß die Eigenstrahlung des Gitters einen ganz hervorragenden Einfluß auf die Gestaltung der nach Aschkinass und Schäfer aufgenommenen Kurven ausgeübt hatte. Ihre Intensität war sogar, nach den letzten Versuchen zu schließen, ungefähr von derselben Größenordnung, wie sie in den vorliegenden Absorptionskurven gemessen wurde. Man hätte daher bei gemeinsamer Wirkung der primären und sekundären Strahlung noch bedeutend größere Ausschläge erwarten müssen, und es gewann deshalb den Anschein, als ob alle auf das Gitter auftreffende Energie des Erregers entweder absorbiert oder reflektiert würde, daß aber nur ein ganz geringer Teil hindurchginge. Über diese Verhältnisse sollte ein Versuch Klarheit schaffen.

So wie man mit Hilfe der Lindmanschen Anordnung die Strahlung eines Gitters ohne Störung durch den Erreger untersuchen kann, ebenso läßt sich natürlich umgekehrt die vom Gitter durchgelassene Strahlung des Erregers allein messen, wenn man die Anordnung so trifft, daß das Gitter auf den Meßresonator keinen Einfluß ausüben kann. Zu diesem Zwecke braucht man nur den Meßresonator unter einen Winkel von 45° gegen den Erreger geneigt aufzustellen und dem dazwischen stehenden Gitter eine Lage zu geben, daß seine Resonatoren gegen den Meßresonator um 90° geneigt sind, gegen den Er-

reger also um 45° . Bei dieser Anordnung wurde eine Resonanzkurve der durchgelassenen Strahlung aufgenommen, und zwar wurde der Versuch in der Weise durchgeführt, daß für jede Länge des Meßresonators zunächst die freie Strahlung (Kurve *a*) und dann, nach Aufstellung des Gitters, die durch Absorption geschwächte Strahlung (Kurve *b*) gemessen wurde (Fig. 11). Man hätte annehmen sollen, daß durch die Einfügung des Gitters die Strahlung erheblich geschwächt werden würde; denn einmal muß ein gewisser Teil davon an dem Gitter reflektiert werden, während ein zweiter Teil zur Anregung der Schwingungen der Gitterresonatoren verbraucht wird, der bei der gewählten Anordnung für die Messung ebenfalls verloren geht.

Es ergab sich aber im Gegenteil, daß die Intensitäten der bei der Verwendung des Gitters aufgenommenen Resonanzkurve sogar durchgängig etwas größer waren, als die bei freier Strahlung gemessenen. Dieser Unterschied ist aber offenbar dem Umstande zuzuschreiben, daß die Gitterresonatoren wahrscheinlich nicht einen genauen Winkel von 90° mit dem Meßresonator bildeten und so doch noch einen Einfluß ausübten. Wenn wir aber davon absehen, so können wir sagen, daß mit den angewandten Hilfsmitteln eine Absorption in dem Gitter überhaupt nicht festgestellt werden konnte.

Wenn nun aber zu der fast ungeschwächten Strahlung des Erregers noch die, wie gefunden wurde, ebenfalls starke Strahlung des Gitters hinzutritt und trotzdem keine Vergrößerung, sondern eher eine Verkleinerung der Ausschläge bemerkbar wird, so kann die Erklärung dafür nur in der theoretisch und experimentell öfters untersuchten Tatsache gesucht werden, daß zwischen der einen Resonator anregenden und der von diesem ausgehenden Schwingung eine Phasendifferenz besteht.

Wie man aus dem Vorhergehenden ersehen kann, beziehen

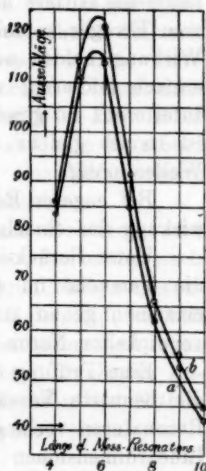


Fig. 11.

sich die Versuche von Aschkinass und Schäfer, ebenso wie die in der vorliegenden Arbeit erwähnten auf ziemlich verwickelte Verhältnisse.

Auf den Meßresonator wirkt in erster Linie die wenig geschwächte durchgehende Welle des Erregers. Darüber gelagert ist die Schwingung, welche von jedem einzelnen Resonator des Gitters ausgeht. Diese haben gegen die unmittelbar vom Erreger kommenden Wellen einen Gangunterschied. Die Wirkung beider auf den Meßresonator wird sich also nicht einfach addieren; es findet aber im allgemeinen auch keine Interferenz im gewöhnlichen Sinne des Wortes statt, denn dazu ist immer gleiche Schwingungsdauer der zusammentreffenden Wellen nötig.

Bei engeren Resonatoren gittern kommt dazu noch die Einwirkung der einzelnen Elemente aufeinander in Betracht.

Unter Berücksichtigung aller dieser Umstände lassen sich die Versuche im ganzen wohl verstehen; sie aber auch im einzelnen genau zu verfolgen, dazu sind die Verhältnisse zu verwickelter Natur.

Eine Prüfung der Planckschen Theorie war aber durch die benutzte Versuchsanordnung unmöglich gemacht, da sie Resonatoren verlangt, deren Abstände zugleich groß gegen ihre Lineardimensionen und klein gegen ihre Wellenlänge sind. Wenn diese Forderung überhaupt zu verwirklichen ist, so würde das durch annähernd in sich geschlossene Resonatoren möglich sein.

Leider konnte ich meine Versuche nicht mehr auf solche Systeme ausdehnen.

Schluß.

Die in vorstehender Arbeit beschriebenen Versuche hatten folgende Ergebnisse:

1. Zur Erzeugung einer intensiven, verhältnismäßig wenig gedämpften Schwingung ist die Anwendung eines induktiv erregten Oszillators zu empfehlen, wenn die Versuche die Abschirmung einer scheinbar unvermeidlichen, durch den Primärkreis bedingten störenden Schwingung gestatten.

2. Bei einem stabförmigen Erreger kann man auch in der zu seiner linearen Ausdehnung senkrechten Ebene eine

Schwingungskomponente messen, welche gegen die reguläre Komponente eine Phasenverschiebung von ca. 90° hat.

3. Das Verhalten von Resonatorsystemen im Strahlungsfelde eines Erregers ist abhängig von der gegenseitigen Entfernung der einzelnen Elemente. Sind sie in Abständen von der Größe ihrer halben Wellenlänge und noch mehr angeordnet, so ist die Schwingungsdauer der einzelnen Resonatoren ungeändert. Verringert man ihre Abstände, so scheint dadurch ihre Periode beeinflußt zu werden. Indessen konnte diese Wirkung nicht mit Sicherheit festgestellt werden. Nähert man die Resonatoren einander noch weiter (bis auf 1—2 Proz. ihrer Wellenlänge), so zeigen die Resonanzkurven an Stelle des scharf ausgeprägten Maximums eine Abflachung; eine Verschiebung des Maximums ließ sich indessen nicht beobachten.

4. Die Versuche von Aschkinass und Schäfer, und damit auch wahrscheinlich die von Garbasso, lassen sich nach meinen Versuchen ebenso wie nach den gebräuchlichen theoretischen Anschauungen dadurch erklären, daß sie nicht, wie von den Verfassern angenommen wurde, als Absorptionsmessungen aufzufassen sind, sondern daß ihre Resultate durch das Zusammenwirken der Erregerstrahlung und der von den Gitterresonatoren ausgehenden Schwingung entstanden sind.

Vorstehende Arbeit wurde im physikalischen Institut der Universität Leipzig angefertigt und ich benutze auch diese Gelegenheit gern, um Hrn. Prof. Dr. O. Wiener, dem Direktor des Instituts, für seine vielfache, überaus liebenswürdige Unterstützung meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

(Eingegangen 6. Dezember 1905.)

7. Ein elektrisches Ventilrohr;¹⁾ von A. Wehnelt.

Im Verlaufe eines Vortrages²⁾ „über die Aussendung negativer Ionen³⁾ durch glühende Metallverbindungen“, gehalten auf der 76. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte Breslau (1904), führte ich ein elektrisches Ventilrohr vor, welches zur Umformung von Ein- und Mehrphasenwechselströmen, d. h. also *elektrischen Schwingungen beliebiger Frequenz* im pulsierenden Gleichstrom diene, ähnlich wie dies die auf ganz anderen Grundsätzen beruhenden Umformer von Hewitt (Quecksilberdampfumformer) und von Grätz (Aluminiumgleichrichtzellen) tun. Eine eingehende Beschreibung der Versuche mit dem Ventilrohr hatte ich bisher nicht gegeben, da ich zunächst eine Reihe von glastechnischen Schwierigkeiten überwinden wollte, um die von mir im Laboratorium vielfach verwendeten Röhren praktisch brauchbar zu machen. Da diese Schwierigkeiten nun behoben sind, so gebe ich jetzt an dieser Stelle eine eingehendere Beschreibung meiner Versuche.

Prinzip des Ventilrohres.

In einer Reihe von Abhandlungen⁴⁾ habe ich gezeigt, daß Leiter, die mit gewissen Oxyden, besonders denjenigen des

1) Im Auszuge bereits veröffentlicht in den Sitzungsber. der physik. mediz. Societät, Erlangen 37. p. 264—269. 1905.

2) A. Wehnelt, Physik. Zeitschr. 5. p. 680—681. 1904.

3) Unter negativen Ionen sind hier die Träger der negativen Elektrizität in Gasen (auch Korpuskeln oder negative Elektronen genannt) zu verstehen.

4) A. Wehnelt, Sitzungsber. der physik.-mediz. Societät, Erlangen p. 150—158. 1903; Ann. d. Phys. 14. p. 425—468. 1904; Physik. Zeitschr. 5. p. 680—681. 1904; Phil. Mag. (6) 10. p. 80—90. 1905; Zeitschr. f. d. phys. und chem. Unterr. 18. p. 198—198. 1905.

Baryums, Strontiums und Calciums überzogen sind, im glühenden Zustande zahlreiche negative Elektronen aussenden, und daß sie deshalb, als Kathoden in Entladungsröhren verwendet, den Kathodenfall stark herabsetzen bez. gänzlich aufheben, da sie die Verarmung an negativen Ionen um die Kathode vermindern.

In dem Ventilrohr wird diese Eigenschaft der Oxyde, im glühenden Zustande unter geeigneten Versuchsbedingungen so gut wie keinen Kathodenfall zu besitzen, benutzt. Dasselbe enthält als Kathode einen schwer schmelzbaren Leiter (z. B. Platin, Iridium, Tantal, Kohle u. s. w.), der in irgend einer Weise erhitzt werden kann und mit Metalloxyd bez. Metalloxydmischungen überzogen ist. Es sei eine solche Elektrode weiterhin stets kurz *Oxydelektrode* genannt. Als Anoden dienen je nach dem Zwecke, dem das Rohr dienen soll, ein oder mehrere starke Elektroden aus irgend einem Leiter.

Wird die Oxydkathode des sehr weit evakuierten Rohres auf hohe Temperatur erhitzt, und verbindet man eine der Anoden mit dem positiven, die glühende Oxydelektrode mit dem negativen Pole einer Gleichstromquelle, so beträgt das Entladungspotential des Ventilrohres nur etwa 18—20 Volt und zwar bis zu Stromstärken, die durch die Größe der Oberfläche und die Temperatur der glühenden Oxydelektrode gegeben sind. Wie ich an anderer Stelle mitgeteilt habe, kann bei hohen Temperaturen, die durch die Flächeneinheit (1 cm^2) der glühenden Oxydkathode hindurchgehende Stromstärke, also die *Stromdichte* 2—3 Amp. betragen, ohne daß sich ein Kathodenfall bemerkbar macht. Die äußerste Stromdichte, bis zu welcher kein merklicher Potentialfall an der Kathode eintritt, nannte ich *Grenzstromdichte*.¹⁾ Die Grenzstromdichte für jede Temperatur steht in innigem Zusammenhange mit der bei dieser Temperatur ausgesandten Zahl von negativen Elektronen.

Wählt man die Stromstärke so, daß an der Kathode kein Kathodenfall vorhanden ist, so hat der Strom nur den Anodenfall und den Fall auf der positiven Säule zu überwinden. Wie besondere Messungen zeigten, ist der Anodenfall unabhängig von der Stromstärke bei reiner Oberfläche der bisher unter-

1) A. Wehnelt, Ann. d. Phys. 14. p. 447—449. 1904.

suchten Leiter 18—20 Volt; ferner ist der Fall auf der positiven Säule bei sehr tiefen Drucken und großen Stromstärken gering (zwischen 1 und 2 Volt), so daß er bei einem geringen Abstände zwischen Anode und Kathode keine merkliche Rolle spielt. Aus dem eben gesagten ergibt sich, daß, wenn der Strom in der Richtung von der kalten Elektrode zur heißen Oxydelektrode übergeht, das Entladungspotential nur ein sehr geringes sein kann.

Kehrt man die Stromrichtung um, so daß die kalte Elektrode zur Kathode wird, so ist das Entladungspotential des Rohres für diese Stromrichtung sehr groß, da schon der normale Kathodenfall etwa 300 Volt beträgt. Da das Rohr aber sehr weit evakuiert ist, so beträgt der Kathodenfall an der kalten Elektrode viele tausend Volt.

Sendet man durch ein solches Rohr elektrische Schwingungen von irgendwelcher Herkunft, so läßt das Rohr nur diejenige Phase des Stromes hindurch, bei der die glühende Oxydelektrode Kathode ist, die andere Phase hingegen nicht, solange die Spannung der Schwingungen unterhalb des Kathodenfalles an der kalten Elektrode liegt, d. h. das Rohr verhält sich dem elektrischen Strome gegenüber wie ein *Ventil*.

Im folgenden möge nun eine Reihe von Versuchen beschrieben werden, die ich zum weitaus größten Teile schon im Laufe des Jahres 1904 ausgeführt habe. Es möge zuerst die Beschreibung des Ventilrohres folgen. Dasselbe hat sich als vorzüglich brauchbar im Laboratorium erwiesen, für praktische Zwecke wird es aber natürlich in mancher Hinsicht noch Änderungen erfahren.

Das Ventilrohr.

Das Ventilrohr Fig. 1 besteht aus einem weit evakuierten, kugelförmigen Glasgefäß von etwa 12 cm Durchmesser. In drei Ansatzröhren sind die drei Anoden A_1 , A_2 und A_3 eingeschmolzen. Dieselben bestehen aus etwa 10 cm langen und 0,5 cm starken blanken Stahlstäben. Ihre Enden nähern sich der Oxydkathode bis auf etwa 1 cm. Die Kathode K besteht aus einem Platinblech von 4 cm Länge, 1 cm Breite und 0,003 cm Dicke, hat also eine Oberfläche von 8 cm² und ist mit einem geeigneten Oxyd bez. Oxydgemisch überzogen. Das Blech ist

an zwei starken Kupferdrähten befestigt, die zur Zuführung des die Kathode erheizenden Stromes dienen. Dieser wird von einem kleinen Transformator oder einigen Akkumulatoren geliefert.

Große Schwierigkeiten bereitete es, die Stromzuleitungen zur Oxydkathode so anzuordnen, daß an den Einsmelzstellen bei Stromdurchgang kein Springen des Glases eintrat. Bis zu Stromstärken von 15 Amp. kann man noch Platindrähte, im Einsmelzglas eingeschmolzen, verwenden, darüber hinaus war dies aber

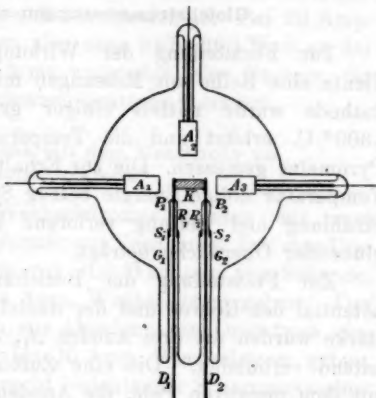


Fig. 1.

nicht mehr möglich, da dann stets die Einsmelzstellen sprangen.

Um diesem Übelstande zu begegnen, habe ich folgende Anordnung (Fig. 1) getroffen, die sich für den vorliegenden Zweck bisher sehr gut bewährt hat. D_1 und D_2 sind die starken Zuleitungen, durch welche der Strom zur Erhitzung der Oxydkathode K fließt. D_1 und D_2 sind bei P_1 und P_2 luftdicht in die Enden von zwei Platinröhren R_1 und R_2 , von etwas den Durchmesser von D_1 und D_2 übertreffender lichter Weite, hart eingelötet. Die Platinröhren R_1 und R_2 sind dann bei S_1 und S_2 luftdicht in die Glasröhren G_1 und G_2 eingeschmolzen. Die von dem Strom in D_1 D_2 erzeugte Wärme ist somit von den Einsmelzstellen S_1 und S_2 selbst ferngehalten. Dieselben empfangen nur Wärme von D_1 D_2 durch die Leitung der Platinröhren, die aber der schlechten Wärmeleitung des Platins wegen nur gering ist, und durch Wärmestrahlung von den Zuführungsdrähten.

Die Einsmelzstellen, sowie die Platinröhren R_1 und R_2 können überdies noch durch eine Kühlflüssigkeit gekühlt werden (wenn man das Rohr umkehrt, so daß D_1 und D_2

oben sind), wodurch eine hohe Strombelastung der Zuführungsdrähte ermöglicht wird.

Gleichstrommessungen am Ventilrohr.

Zur Feststellung der Wirkungsweise des Ventilrohres diente eine Reihe von Messungen mit Gleichstrom. Die Oxydkathode wurde mittels einiger großer Akkumulatoren auf 1300° C. erhitzt und die Temperatur mit einem optischen Pyrometer gemessen. Die zur Erhaltung des Bleches auf dieser Temperatur nötige Energie betrug 80 Watt, so daß die durch Strahlung und Leitung verlorene Energie 10 Watt pro cm^2 glühender Oberfläche beträgt.

Zur Feststellung der Beziehung zwischen Entladungspotential des Rohres und der dasselbe durchfließenden Stromstärke wurden die drei Anoden A_1 , A_2 , A_3 (Fig. 1) miteinander leitend verbunden. Die eine Zuführung zur Kathode wurde mit dem negativen Pole, die Anoden unter Zwischenschaltung regulierbarer Widerstände mit dem positiven Pole einer Akkumulatorenbatterie von 110 Volt Spannung verbunden.

Die Messung ergab, daß *das Entladungspotential bei Stromstärken von 0,1 Amp. bis 20 Amp. völlig konstant war und nur etwa 19 Volt betrug.*

Die Stromstärken von 10 Amp. an aufwärts durften nur kurze Zeit das Rohr durchfließen, da die Anoden sich so stark erhitzen, daß sie unter lebhaftem Funkensprühen zerstäubten. Für dauernde Belastung mit so starken Strömen müßten die Stahlanoden wesentlich stärker gewählt werden. (In Fig. 1 sind die Anoden bereits stärker gezeichnet.)

Die hohe Temperatur der Anoden erklärt sich daraus, daß an diesen fast die gesamte im Rohr verbrauchte Energie in Wärme umgesetzt wird, denn der Kathodenfall an der glühenden Oxydkathode ist, wie bereits oben erwähnt je nach der Temperatur derselben bis zu Stromdichten von etwa 2—3 Amp. verschwindend klein, spielt also hier keine Rolle, da die Stromdichte im Maximum nur $\frac{20 \text{ (Amp.)}}{8 \text{ (cm}^2\text{)}} = 2,5 \text{ (Amp./cm}^2\text{)}$ betrug.

Ferner ist der Gradient auf der positiven Säule bei starken Strömen und tiefen Drucken, wie besondere Messungen zeigten, sehr gering und zwar nur 1—2 Volt. Da die Anoden der Oxyd-

kathode auf weniger als 1 cm genähert waren, so ist der Spannungsverlust hierdurch höchstens 2 Volt, wahrscheinlich aber geringer. So kommen von dem ganzen Entladungspotential etwa 17—18 Volt auf den Anodenfall. Bei 20 Amp. Stromstärke im Rohr werden also etwa 340—360 Watt an der Oberfläche der Anode in Wärme umgesetzt, eine Energie, die hinreichend die hohen Anodentemperaturen¹⁾ erklärt.

Quantitative Versuche mit dem Ventilrohr im Wechselstromkreise.

Zur Erzeugung des Wechselstromes standen mir zwei Gleichstromwechselstromumformer zur Verfügung. Der eine Umformer lieferte Wechselstrom von 100 Wechseln pro Sekunde, konnte aber nur bis etwa 4 Amp. Wechselstrom geben. Der andere Umformer, der auch zur Abnahme von Drehstrom eingerichtet war, konnte zwar bis 20 Amp. Wechselstrom geben, jedoch trat dabei schon ein recht bedeutender Spannungsverlust auf. Normal lieferte er Wechselstrom von nur 40 Wechseln, konnte aber vorübergehend auf 60 Wechsel in der Sekunde gebracht werden.

Die Messungen erstreckten sich auf die Feststellung der später im einzelnen aufgeführten elektrischen Größen, erstens wenn sich im Wechselstromkreise außer dem Ventilrohre nur

1) Die hohen Temperaturen, die man an den Anoden von Entladungsröhren erhält, durch die man unter Verwendung glühender Oxydkathoden starke Ströme senden kann, gestatten es, wie Hr. E. Wiedemann und der Verf. Physik. Zeitschr. 6. p. 690. 1905 zeigten, alle Leiter (Metalle, Kohle etc.) im Vakuum zu verdampfen und die Spektren der unter dem Einfluß der Entladung sehr hell leuchtenden Dämpfe zu untersuchen. Die große Lichtstärke, besonders die der leuchtenden Metaldämpfe in Verbindung mit der Möglichkeit, Metallmischungen zu verdampfen, welche Licht von möglichst zahlreichen über das ganze sichtbare Spektrum verteilten Wellenlängen aussenden, läßt es als wahrscheinlich erscheinen, daß man auf diese Weise rationelle Lichtquellen herstellen kann, die nicht den Nachteil der Quecksilberdampfampfen haben, nur Licht einiger weniger Wellenlängen auszusenden. Läßt man das Licht einer solchen Metaldampfampe durch ein Quarzfenster aus dem Rohr austreten, so besitzt man in dem Rohr eine Quelle intensiver ultravioletter Strahlung. Schwer verdampfbare Leiter (z. B. Metalle, Kohle etc.) als Anoden benutzt, können so hoch erhitzt werden, daß sie selbst ein intensives weißes Licht aussenden.

nahezu selbstinduktions- und kapazitätsfreie Widerstände befanden, und zweitens, wenn der durch das Ventilrohr aus dem Wechselstrom gewonnene pulsierende Gleichstrom zur Ladung einer Akkumulatorenbatterie von etwa 110 Volt diene.

1. Im Wechselstromkreise befindet sich das Ventilrohr, ein regulierbarer Widerstand, ein Hitzdrahtampèremeter und ein Gleichstromampèremeter. Die Spannung des Wechselstromes wurde mit einem Hitzdrahtvoltmeter gemessen.

Das Hitzdrahtampèremeter mißt den effektiven Mittelwert des pulsierenden Gleichstromes, den ich im folgenden stets mit \bar{J} bezeichnen will, das Gleichstromampèremeter (Drehspulensinstrument) mißt angenähert den elektrolytischen Mittelwert, den ich im folgenden mit \bar{i} bezeichnen will. Auf eine voltametrische Eichung des Gleichstromampèremeters mit dem pulsierenden Gleichstrom (bei genaueren Messungen nötig wegen des Nebenschlusses im Instrument) habe ich verzichtet, da die Korrekturen nur wenig mehr als 1 Proz. betragen, und eine größere Genauigkeit für den hier vorliegenden Zweck nicht erforderlich war.

In folgender Tabelle sind die Resultate einer der Messungsreihen enthalten. In derselben haben \bar{i} und \bar{J} die bereits vorher angegebene Bedeutung. E ist der Effektivwert der Wechselstromspannung, W der Widerstand im Stromkreise.

Tabelle I.
(Wechselzahl $n = 46,7$ pro Sek.)

\bar{i} (Amp.)	\bar{J} (Amp.)	E (Volt)	W (Ohm)
2,8	4,5	153,6	20,2
3,4	5,5	153	16,7
4,2	6,8	152,4	12,8
5,8	9,3	150	9,1

Mit Hilfe der Braunschen Röhre wurden nach bekannter Methode die Stromkurven des Kreises und der zeitliche Verlauf der Spannung an den Elektroden des Ventilrohres beobachtet. In Fig. 2 stellt die ausgezeichnete Kurve die Stromkurve, die punktiert gezeichnete Kurve die Spannungskurve am Ventilrohr dar.

Die Stromkurven beweisen, daß die Ventilwirkung eine vollkommene ist. Es geht nur die eine Phase des Stromes durch das Rohr. Die Spannungskurven am Rohr zeigen den nach den früheren Messungen mit Gleichstrom zu erwartenden Verlauf. Derselbe ist für die Phase, bei der kein Strom durch das Rohr geht, nahezu sinusförmig, d. h. er entspricht der Form des benutzten Wechselstromes. In der Phase hingegen, während welcher Strom durch das Rohr hindurchgeht, steigt

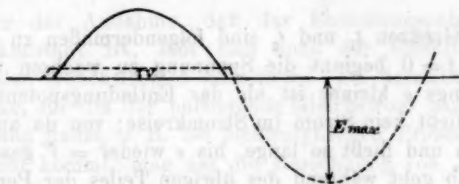


Fig. 2.

die Spannung zuerst bis zu einem gewissen Wert an, bleibt dann völlig konstant, um gegen das Ende der Phase auf Null zu sinken. Aus der Messung der Amplituden E_{\max} . (Maximalwert der Wechselstromspannung) und V (konstante Spannung) (vgl. Fig. 2) ergab sich, daß V stets nahezu 20 Volt beträgt, d. h. während des Stromdurchganges ist für die hier benutzten Stromstärken das Entladungspotential V des Ventilrohres völlig konstant und zwar nahezu gleich 20 Volt.

Dieses Verhalten des Ventilrohres setzt uns in den Stand, die effektiven und elektrolytischen Mittelwerte des pulsierenden Gleichstromes zu berechnen, wenn der zeitliche Verlauf der Wechselstromspannung und der Widerstand im Stromkreise gegeben sind.

Der zeitliche Verlauf der Spannung kann bei einem Gleichstromwechselstromumformer mit großer Annäherung als sinusförmig angesehen werden. Bedeutet daher e den Momentanwert, E_{\max} den Maximalwert und T die Dauer der Periode der Spannung, so gilt

$$e = E_{\max} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Ist ferner W der induktions- und kapazitätsfreie Widerstand des Ventilrohres, so gilt

stand des Stromkreises, V das konstante Entladungspotential des Rohres, dann ist die Stromstärke i zur Zeit t

$$i = \frac{e - V}{W} = \frac{1}{W} \left(E_{\max.} \sin 2\pi \frac{t}{T} - V \right).$$

Der elektrolytische Mittelwert des pulsierenden Stromes ergibt sich hieraus zu

$$\bar{i} = \frac{1}{WT} \int_{t_1}^{t_2} \left(E_{\max.} \sin 2\pi \frac{t}{T} - V \right) dt.$$

Die Grenzen t_1 und t_2 sind folgendermaßen zu ermitteln. Zur Zeit $t = 0$ beginnt die Spannung zu wachsen von $e = 0$ an. Solange e kleiner ist als das Entladungspotential V des Rohres, fließt kein Strom im Stromkreise; von da an setzt der Strom ein und fließt so lange, bis e wieder $= V$ geworden ist. Von da ab geht während des übrigen Teiles der Periode kein Strom mehr durch das Rohr. Die Grenzen t_1 und t_2 sind demgemäß zu ermitteln aus

$$e = V = E_{\max.} \sin 2\pi \frac{t_1}{T} = E_{\max.} \sin 2\pi \frac{t_2}{T},$$

wobei

$$t_2 = \frac{T}{2} - t_1$$

ist.

Unter Berücksichtigung der Werte für t_1 und t_2 ergibt die Integration der obigen Gleichung

$$\bar{i} = \frac{1}{W} \left[\frac{E_{\max.}}{\pi} \cos 2\pi \frac{t_1}{T} - \frac{V}{2} + 2V \frac{t_1}{T} \right].$$

Setzt man in diese Gleichung die oben in Tabelle I angeführten Werte für W und den aus dem effektiven Werte der Spannung E zu berechnenden Maximalwert $E_{\max.}$ und setzt man ferner $V = 20$ Volt, so erhält man für \bar{i} folgende Zahlen:

Tabelle II.

W	\bar{i} berechnet	\bar{i} gemessen
20,2	2,86	2,8
16,7	3,47	3,4
12,8	4,45	4,2
9,1	6,35	5,8

In Anbetracht dessen, daß die vom Gleichstromampèremeter angegebenen Werte unkorrigiert sind (sie sind kleiner als die wirklichen elektrolytischen Mittelwerte der Stromstärke), ist die Übereinstimmung der beobachteten mit den berechneten Werten befriedigend. Die größeren Abweichungen bei den höheren Stromstärken ergeben sich daraus, daß für stärkere Belastungen die Spannungskurve des benutzten Umformers, der sowohl auf der Gleichstrom- wie Wechselstromseite Kohlenbürsten besitzt, beträchtlich von der Sinusform abweicht.

Unter der Annahme, daß das Entladungspotential des Rohres konstant ist, läßt sich auch der Effektivwert des pulsierenden Gleichstromes berechnen. Da derselbe aber für die Zwecke, für die der pulsierende Gleichstrom hauptsächlich Verwendung findet, z. B. bei elektrolytischen Prozessen, nicht in Betracht kommt, mag auf die Berechnung von \bar{I} hier verzichtet werden.

2. Im Wechselstromkreise befindet sich das Ventilrohr, das Gleichstromampèremeter, regulierbarer Widerstand und eine Akkumulatorenbatterie, die durch den pulsierenden Gleichstrom geladen werden soll.

Ein Wattmeter, dessen Spannungsspule unter Vorschaltung eines großen selbstinduktionsfreien Vorschaltwiderstandes an die Wechselstromklemmen gelegt ist, und dessen Stromspule in den vom pulsierenden Strom durchflossenen Stromkreis eingeschaltet ist, mißt die von der Wechselstromquelle abgegebene Energie.

Bezeichnet \bar{i} wieder den elektrolytischen Mittelwert der Stromstärke, P die während der Messung konstante Spannung der Akkumulatorenbatterie (102 Volt), L die mit dem Wattmeter gemessene Energie und l die Energie zur Erhaltung der hohen Temperatur der Kathode, so ist der Nutzeffekt η

$$\eta = \frac{\bar{i} \cdot P}{L + l}.$$

In Tabelle III sind die Ergebnisse einer Messungsreihe enthalten. Die Temperatur der Oxydkathode wurde stets auf etwa 1300° C. gehalten, die hierzu nötige Energie betrug $l = 80$ Watt.

Tabelle III.

Effektive Spannung = 150 Volt. Wechselzahl = 43,5 pro Sek.

P (Volt)	W (Ohm)	\bar{i} (Amp.)	L (Watt)	η in Proz.
102	22	0,7	126	35
"	18	0,8	153	35
"	14	1,0	190,8	38,4
"	9	1,62	306	44,8
"	7	1,9	351	45,2
"	3	3,2	565,2	50,7
"	1	5,3	900	55,4

Der Nutzeffekt ist für schwache Belastung (großer Widerstand im Stromkreise) naturgemäß nur ein geringer, da ein sehr großer Teil der verfügbaren Energie im Vorschaltwiderstand in Wärme umgesetzt wird. Mit abnehmendem Vorschaltwiderstand wächst der Nutzeffekt und zwar erlangt er schließlich Werte, wie sie kleinere Umformeranlagen (Wechselstrommotor-Gleichstromdynamo) auch nur erreichen; setzt doch ein Nutzeffekt einer derartigen Anlage von etwa 50—55 Proz. eines Nutzeffektes jeder Maschine allein von etwa 70—74 Proz. voraus, einen Wert, der wohl von Anlagen von 1—2 P.S. gerade erreicht wird. Der Nutzeffekt würde außerdem noch wachsen, wenn das Verhältnis von Akkumulatorenspannung P zu der effektiven Spannung E des Wechselstromes größer wäre, als im vorliegenden Falle, indem das Verhältnis $P/E = 0,68$ ist.

Der elektrolytische Mittelwert der Stromstärke wurde auch hier berechnet, um zu prüfen, ob das Ventilrohr sich auch in diesem Falle der Theorie entsprechend verhält.

Die Formel zur Berechnung von \bar{i} ergibt sich aus der obigen Formel, wenn statt V (Entladungspotential des Ventilrohres) jetzt $V + P$ gesetzt wird, wo P gleich der Spannung der Akkumulatorenbatterie ist. Die Grenzen t_1 und t_2 des Integrales ergeben sich aus

$$e = V + P = E_{\max.} 2\pi \frac{t_1}{T} = E_{\max.} \sin 2\pi \frac{t_2}{T},$$

wo

$$t_2 = \frac{T}{2} - t_1$$

ist. Es ist alsdann

$$\bar{i} = \frac{1}{W} \left[\frac{E_{\max.}}{\pi} \cos 2\pi \frac{t_1}{T} - (V + P) \left(\frac{1}{2} - 2 \frac{t_1}{T} \right) \right].$$

[Der Widerstand W setzt sich hier zusammen aus dem in den Stromkreis eingeschalteten Widerstand (vgl. Tabelle) und dem Widerstande der Akkumulatorenbatterie einschließlich der Zuleitungen zu derselben, der rund 1 Ohm betrug.]

Tabelle IV enthält die aus der Formel berechneten Werte für \bar{i} und daneben die in Tabelle III enthaltenen gemessenen Werte.

Tabelle IV.

\bar{i} gemessen	\bar{i} berechnet
0,7	0,7
0,8	0,84
1,0	1,06
1,62	1,6
1,9	2,0
3,2	4
5,3	8

Die beobachteten und berechneten Werte stimmen bis auf die letzten beiden Werte genügend überein (es ist wieder zu berücksichtigen, daß \bar{i} zu klein gemessen ist, vgl. oben).

Der Grund für die Abweichungen der berechneten von den beobachteten Werten bei den höheren Stromstärken liegt in der Überschreitung der für die Oxydkathode im Maximum zulässigen Stromstärke. Die Grenzstromdichte (vgl. oben), also die pro cm^2 Oberfläche der glühenden Oxydkathode maximale Stromstärke liegt für eine Temperatur von 1300° etwa zwischen 2 und 2,5 Amp. Die Oberfläche der hier benutzten Oxydkathode beträgt 8 cm^2 , also ist die höchstzulässige, durch das Rohr zu sendende Stromstärke etwa 20 Amp. Dieser Wert wird aber von der maximalen Stromstärke bei den letzten beiden Messungen der Tabelle IV bereits überschritten. Der maximale Wert der Stromstärke $J_{\text{max.}}$ berechnet sich aus

$$J_{\text{max.}} = \frac{E_{\text{max.}} - (P + V)}{W},$$

wo $E_{\text{max.}} = 212 \text{ Volt}$, $P = 102 \text{ Volt}$, $V = 20 \text{ Volt}$ und $W = 3$ bez. 1 Ohm ist.

Es berechnen sich die maximalen Stromstärken hieraus zu 22,5 bez. 45 Amp., überschreiten also die höchste für die hier benutzte Oxydkathode zulässige Stromstärke. Wird letztere aber überschritten, so tritt an der Kathode ein schnell mit der Stromstärke wachsender Kathodenfall auf. Dieser Fall trifft für die beiden letzten Werte für \bar{i} der Tab. III bez. IV zu. Man darf daher für die Berechnung von \bar{i} das Entladungspotential V nicht mehr als konstant ansehen, sondern muß es als eine mit der Stromstärke schnell wachsende Funktion jener betrachten. Die Berechnung liefert also in diesem Falle keine brauchbaren Werte mehr.

Qualitative Versuche mit dem Ventilrohr im Wechselstromkreise geringer Frequenz.

Hierunter mögen einige Versuche beschrieben werden, die ich nicht quantitativ verfolgt habe, deren Ergebnisse aber eine Erwähnung rechtfertigen.

1. *Anwendung des Ventilrohres in Röntgenanlagen.* Der Betrieb der Induktoren mit Wechselstrom bietet bei Anwendung von Flüssigkeitsunterbrechern noch immer einige Schwierigkeiten. Diese zu beseitigen ist das Ventilrohr geeignet, da es eine vollkommene Ventilwirkung ausübt.

Um die Tauglichkeit des Ventilrohres für diesen Zweck zu prüfen, schaltete ich in den Wechselstromkreis des Umformers das Ventilrohr, einen elektrolytischen Unterbrecher in der von mir angegebenen Form, ein Funkeninduktorium von 30 cm Funkenlänge und einen regulierbaren Widerstand.

Der Versuch ergab, daß das Induktorium *völlig einseitig gerichtete Entladungen bei voller Funkenlänge lieferte* und daß *der Unterbrecher genau so arbeitete, wie im Gleichstromkreise*, d. h. daß die Platinanode nicht der Abnutzung unterworfen war, die beim direkten Betrieb mit Wechselstrom unvermeidlich ist. Eine eingeschaltete Röntgenröhre zeigte ein ruhiges stetiges Licht.

Da die Ventiltröhren sich für noch größere Belastungen, als hier angeführt, herstellen lassen, so sind dieselben selbst für die größten Röntgenanlagen brauchbar.

Statt eine sehr große Ventilröhre zu verwenden, empfiehlt es sich, mehrere kleinere Ventilröhren mit kleinflächigen Oxydkathoden parallel zu schalten. Dieselben wirken, wie besondere Versuche zeigten, über die später berichtet werden soll, genau wie ein einziges Rohr mit großer Oxydkathode, gewähren aber den Vorteil, daß man bei geringerem Strombedarf einen Teil der Röhren außer Betrieb setzen kann. Überdies sind kleine Ventilröhren wesentlich billiger herzustellen als große.

In der eben beschriebenen Anordnung wird nur die eine Phase des Wechselstromes ausgenutzt. Um beide Phasen auszunutzen, kann man alle diejenigen Schaltungen verwenden, die bereits bei den Grätzschen Zellen und den Umformern von Hewitt in Gebrauch sind.

Die Brückenschaltung mit vier Ventilröhren ist bei Niederspannungswechselstrom nicht zu empfehlen, da die hierfür vorhandene Hintereinanderschaltung von zwei Röhren einen Spannungsverlust von 40 Volt bedingt. Für Hochspannungsanlagen stört dieser Verlust nicht sehr.

Für Niederspannungsanlagen empfiehlt sich die Schaltung Fig. 3, in der T ein Transformator mit zwei hintereinandergeschalteten Sekundärwicklungen ist, deren jede z. B. 110 Volt Spannung gibt. Die freien Enden A und C der Wicklungen werden je mit der kalten Elektrode eines Ventilrohres V_1 und V_2 verbunden (die Anoden sind in Fig. 3 als Stäbe, die Oxydkathoden der Einfachheit wegen als Platten gezeichnet). Von den Oxydelektroden der Ventilröhren führen Leitungen zum Punkt D . Zwischen B und D schaltet man dann den Apparat (z. B. Induktorium mit Flüssigkeitsunterbrecher, Akkumulatoren etc.) ein, der von dem pulsierenden Gleichstrom durchflossen werden soll. Statt zweier Ventilröhren kann man nach Hewitt¹⁾ auch ein Ventilrohr mit zwei Anoden benutzen.

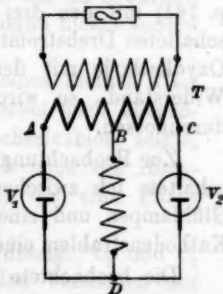


Fig. 3.

1) Vgl. z. B. M. Leblanc, Journ. de Physique (4). 4. p. 417—441. 1905.

Schließt man die Anode bez. die Anoden eines Ventilrohres in enge Glasröhren ein, so läßt dasselbe selbst bei sehr hohen Spannungen nur eine Phase des Wechselstromes hindurch. Solche Röhren gestatten dann bei Anwendung einer der oben angegebenen Schaltungen pulsierenden Hochspannungsgleichstrom zu erzeugen, der namentlich in Laboratorien vielfach Verwendung finden könnte, so z. B. zum direkten Betriebe von Röntgenröhren mit Funkentransformatoren, zum Laden von Hochspannungsakkumulatorenbatterien etc.

Bei der Einschaltung eines derartigen Ventilrohres in den sekundären Stromkreis eines mit unterbrochenem Gleichstrom betriebenen Induktoriums kann ersteres zur Unterdrückung der Schließungsströme dienen. Für die Öffnungsströme, die das Rohr durchfließen, besitzt es dann des verschwindend kleinen Kathodenfalles an der glühenden Oxydkathode wegen einen geringeren sogenannten Widerstand, als die bekannten Ventilröhren mit kalten Elektroden.

Versuche mit Drehstrom.

Verbindet man die drei Anoden des Ventilrohres (Fig. 1, p. 141) mit den drei Eckpunkten eines in Sternschaltung geschalteten Drehstromtransformators und verbindet die glühende Oxydkathode mit dem Knotenpunkte desselben durch einen Widerstand, so wird dieser von pulsierendem Gleichstrom durchflossen.

Zur Beobachtung der Kurvenform des pulsierenden Stromes schaltete ich zwischen Oxydkathode und Knotenpunkt einige Glühlampen und eine kleine Spule, die zur Ablenkung der Kathodenstrahlen einer Braunschen Röhre diente.

Die beobachtete Kurve war die bei völliger Ventilwirkung zu erwartende. Der Strom bleibt immer über Null. Diese Stromform eignet sich ganz vorzüglich z. B. zum Betriebe von Gleichstrombogenlampen von Drehstromzentralen aus. Besonders geeignet ist sie zum Betriebe von Bogenlampen für Projektionsapparate, da diese, wenigstens für optische Versuche, nicht mit Wechselstrom betrieben werden können, da statt der erwünschten einen Lichtquelle bei Wechselstrom deren immer zwei vorhanden sind.

Ich schaltete zwischen Oxydkathode und Knotenpunkt des Transformators einen Handregulator für Bogenlicht, geeigneten Vorschaltwiderstand und ein Gleichstromampèremeter.

Bei einer Stromstärke von 5 Amp. erhielt ich ein sehr schönes Bogenlicht, das von einem Gleichstromlichtbogen nicht zu unterscheiden war. Bei schneller Bewegung der Augen nahm man allerdings ein Flimmern des Lichtes wahr, doch wird dies nicht zu stark auffallen, wenn Drehstrom von 100 Wechsel pro Sekunde verwendet wird, da es schon bei 45 Wechseln in meinen Versuchen nicht störte.

Es ist zu erwarten, daß der aus Drehstrom gewonnene pulsierende Gleichstrom sich für die meisten Zwecke weit besser eignet, als der aus Einphasenwechselstrom gewonnene.

Sicher wird der Nutzeffekt des Ventilrohres in diesem Falle ein höherer sein. Die hierher gehörigen Versuche werden fortgeführt.

Versuche mit dem Ventilrohr in Wechselstromkreisen hoher Wechselzahl.

Da die Ventilwirkung des Rohres bei niedrigen Wechselzahlen sich als eine vollkommene erwies, so war zu erwarten, daß auch eine Steigerung der Wechselzahl hieran nichts ändern würde.

Zuerst steigerte ich die Wechselzahl eines kleinen Umformers auf 200 pro Sekunde. Da sich hierbei noch ebenso gute Ventilwirkung, wie bei geringeren Wechselzahlen, zeigte, so untersuchte ich, ob die Ventilröhren auch noch von Hochfrequenzwechselströmen (Teslaschwingungen) die eine Phase unterdrücken.

Fig. 4 zeigt die benutzte Versuchsanordnung. C_1 und C_2 sind zwei Luftkondensatoren (wie sie zu den Versuchen mit dem Lecherschen Drahtsystem benutzt werden), von denen je eine Platte mit der Funkenstrecke F verbunden war. Die anderen Platten waren durch eine Spule S_1 von wenigen mit großer Ganghöhe auf einen Glaszylinder gewickelten Windungen eines dünnen Kupferdrahtes verbunden. Die Funkenstrecke F war mit einer 20 plattigen Influenzmaschine verbunden.

Eine zweite Spule S_2 von nur zwei Windungen eines starken Kupferdrahtes war unter Einschaltung eines Galvano-

meters G mit den Elektroden eines Ventilrohres V verbunden, bei dem die Kathode aus einem mit Oxyd überzogenen Platindraht D bestand, der sich in der Achse eines als Anode dienenden Metallzylinders Z befand. Der Abstand zwischen den Spulen S_1 und S_2 konnte beliebig geändert werden.

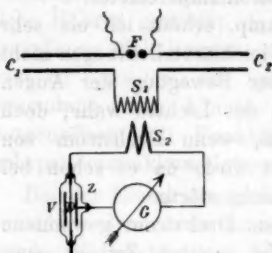


Fig. 4.

Wurden in S_1 Schwingungen erregt, so gab das Galvanometer keinen Ausschlag, solange die Oxydkathode des Ventilrohres kalt war, da die niedrigen induzierten

Spannungen das Vakuum nicht zu durchbrechen vermochten. Aber auch eine direkte Anschaltung des Galvanometers an die Enden der Spule S_2 gab naturgemäß keinen Ausschlag.

Glühte hingegen bei eingeschaltetem Ventilrohr die Oxydkathode, so gingen starke Gleichströme durch das Galvanometer, die erst bei Entfernung der Spulen von nahe einem Meter so schwach wurden, daß sie keinen Ausschlag mehr gaben. Wurden die Zuleitungen zum Ventilrohr miteinander vertauscht, so kehrte sich auch die Richtung des Stromes um, d. h. das Rohr wirkt auch noch bei Wechselströmen derartig hoher Frequenz als Ventil.

Um die Ventilwirkung für noch höhere Frequenzen zu untersuchen, ließ ich auf einen Stromkreis, der aus einem Drahtrechteck bestand und in dem sich ein Ventilrohr und ein Galvanometer befand, Wellen auftreffen, die in ungefähr 10 m Entfernung von einem Righioszillator (aber ohne Öl), der von einer Influenzmaschine erregt wurde, ausgingen. Der Versuch ergab recht kräftige Ausschläge des Galvanometers, deren Sinn sich auch mit der Vertauschung der Pole des Ventilrohres umkehrte.¹⁾

1) Ähnliche Versuche hat neuerdings Hr. J. A. Fleming, Proceed. London Roy. Soc. 74. p. 476—487. 1905, wohl angeregt durch meine Veröffentlichung über das Ventilrohr in der Physikalischen Zeitschrift 5. p. 680—681. 1904, mit einem ähnlichen Rohre angestellt, wie das bereits Ann. d. Phys. 14. p. 425—468. 1904 von mir beschriebene. Nur benutzt Hr. Fleming statt der von mir verwendeten mit Oxyden überzogenen

Eine der oben bei den Starkstromversuchen beschriebenen Schaltungen gestattet es dann, beide Phasen des Stromes durch das Galvanometer zu senden und dadurch die Empfindlichkeit dieser Methode, elektrische Wellen aufzufinden, nahezu zu verdoppeln.

Steht ein Differentialgalvanometer zur Verfügung, so empfiehlt es sich, den Empfängerkreis in zwei Zweige zu gabeln, deren jeder ein Ventilrohr und die eine Spule des Galvanometers enthält. Die Ventiltröhen sind dabei so geschaltet, daß das eine die eine, das andere die zweite Phase hindurchläßt. Die pulsierenden Gleichströme verschiedener Richtung durchfließen dann je eine Spule des Differentialgalvanometers in solcher Richtung, daß sich ihre Wirkungen addieren.

Von Wert dürften auch die Ergebnisse von Versuchen sein, mit Hilfe des Ventilrohres bei schwingenden Systemen die Verteilung der Energie stehender Wellen zu bestimmen. So ließ sich z. B. das magnetische Feld eines Lecherschen Drahtsystems mit Hilfe einer Drahtschleife untersuchen, welche in konstantem Abstände oberhalb der Drähte längs des Systems verschoben wurde. In den Stromkreis der Drahtschleife war ein Ventilrohr und ein empfindliches Galvanometer eingeschaltet. Über diese und andere hierher gehörige Versuche soll später berichtet werden.

Schluß.

Um wirksame Ventiltröhen herzustellen, muß vor allem auf möglichste Sauberkeit geachtet werden. Schon geringe Spuren von Kohlenwasserstoffen im Rohr bewirken bei Stromdurchgang durch das Gas eine Zersetzung der Oxyde unter Bildung von Karbiden, die sich in Form schwarzer Niederschläge an den Glaswandungen der Röhre absetzen.

Leiter einen Leiter selbst, und zwar Kohle, als glühende Elektrode, die wie bekannt ja auch negative Elektronen aussenden, aber weniger, als wenn sie mit einem der von mir angegebenen Oxyde überzogen sind. Hr. Fleming macht darauf aufmerksam, daß derartige Röhren als Wellendetektoren in der drahtlosen Telegraphie Verwendung finden können, was nach den von mir mit elektrischen Wellen erzielten Resultaten selbstverständlich war.

Aus diesem Grunde sind bei dem Auspumpen der Ventilröhren alle Fettdichtungen und Siegellackkittungen zu vermeiden, falls das Rohr längere Zeit seine volle Wirksamkeit behalten soll.

Aufs sorgfältigste hergestellte Röhren habe ich bisweilen 20 Stunden und mehr in Betrieb gehabt, ohne daß ihre Wirksamkeit im geringsten nachließ. Wie die Röhren sich im Dauerbetriebe verhalten, sollen Versuche in der Praxis ergeben.

Die Ausführung der Ventilröhren habe ich Hrn. P. Gundelach in Gehlberg in Thüringen übertragen, der mich bei meinen Versuchen in zuvorkommendster Weise unterstützt hat.

Erlangen, Physik. Institut der Universität, Nov. 1905.

(Eingegangen 1. Dezember 1905.)

**8. Über den Widerstand von Spulen
für schnelle elektrische Schwingungen;
von Thomas P. Black.**

(Aus der Straßburger Dissertation des Verfassers.)

A.

Bei ihrer Untersuchung der oszillatorischen Entladung von Kondensatorkreisen haben Battelli und Magri¹⁾ den Widerstand von aufgespulten Drähten bei schnellen Wechselströmen bestimmt und gefunden, daß der Widerstand höher ist als der Widerstand derselben Drähte, wenn sie geradlinig gestreckt sind. Sie haben die Erscheinung auch richtig interpretiert. Ihre Spulen hatten sehr geringen Drahtradius und sehr kleine Ganghöhe, wie man sie wohl nur zu ganz speziellen Zwecken verwendet. Andere experimentelle Untersuchungen liegen mit Ausnahme einer von F. Dolezalek²⁾, die sich nur auf Wechselzahlen bis 5000 pro Sekunde bezieht, und einiger wenigen Angaben von K. E. F. Schmidt³⁾ nicht vor.

Theoretisch behandelt wurde der Widerstand von Spulen durch M. Wien⁴⁾ und A. Sommerfeld.⁵⁾ Die Theorie von Wien aber zieht nur den Fall verhältnismäßig langsamer Schwingungen in Betracht, während Sommerfeld seine Untersuchung auf beliebig hohe Wechselzahlen ausdehnt, wie sie etwa in der drahtlosen Telegraphie Verwendung finden. Er substituiert in seiner Arbeit, welche, wie das Folgende zeigen wird, die Verhältnisse in fast allen Beziehungen *qualitativ* richtig wiedergibt, für die praktisch gebrauchten Spulen endlicher Länge und Ganghöhe unendlich lange Röhren mit zyklischer Strömung. Dadurch erreicht er den großen Vorteil, daß eine exakte mathematische Behandlung nicht auf extreme

1) A. Battelli u. L. Magri, Phil. Mag. 5. p. 19. 1903.

2) F. Dolezalek, Ann. d. Phys. 12. p. 1142. 1903.

3) K. E. F. Schmidt, Abhandl. d. phys. Gesellsch. Oktober 1904.

4) M. Wien, Ann. d. Phys. 14. p. 1. 1904.

5) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 15. p. 673. 1904.

mathematische Schwierigkeiten führt. Auf der anderen Seite aber liegt es im Wesen der Sache, daß seine Theorie einen Einfluß von Spulenlänge und -ganghöhe nicht ergeben kann: daß sie die Werte des Widerstandes nicht *quantitativ* richtig liefert, hat Sommerfeld selbst an der Hand der experimentell ermittelten Werte von Battelli und Magri festgestellt. Unter diesen Umständen schien eine systematische experimentelle Untersuchung, die einen Überblick über die Verhältnisse bei schnellen Schwingungen geben sollte, von Wert.

I. Methode der Untersuchung.

Die Methode der Untersuchung ist die folgende: Der effektive Widerstand w der Längeneinheit einer Leitung bei Schwingungen sei dadurch definiert, daß $w \int_0^{mT} i^2 dt$ die Wärmemenge ist, die während m voller Perioden T in der Längeneinheit der Leitung entwickelt wird, wenn i der gesamte Strom ist, welcher zur Zeit t den Leitungsquerschnitt q durchfließt: d. h. wenn $i = \int_q \mathcal{E} dq$ (\mathcal{E} = Strömung) ist.

Setzt man in denselben Schwingungskreis einen geraden Draht und eine aus demselben Draht gewickelte Spule, so verhalten sich demnach die in einer gewissen Zeit entwickelten Wärmemengen zueinander wie der effektive Widerstand der Spule zu dem effektiven Widerstand des geraden Drahtes.

Das heißt es ist

$$(1) \quad \frac{Q_s}{Q} = \frac{\int_0^{mT} w_s \cdot l_s \cdot i^2 \cdot dt}{\int_0^{mT} w \cdot l \cdot i^2 \cdot dt} = \frac{w_s \cdot l_s}{w \cdot l},$$

worin Q_s die in der Spule entwickelte Wärmemenge, w , den effektiven Widerstand pro Längeneinheit des Spulendrahtes, l_s die Drahtlänge der Spule bedeuten, und Q , w , l die entsprechende Bedeutung für den geraden Draht haben. Werden Spule und gerader Draht je in ein Kalorimeter gebracht, so entspricht der Wärmemenge Q_s ein gewisser Ausschlag α_s , der Wärmemenge Q ein Ausschlag α . Die Aufgabe ist

dann, aus diesen Ausschlägen das Verhältnis $Q_s:Q$ zu bestimmen.

Man verfährt am besten in folgender Weise: Man schickt Gleichstrom durch die Spule und den geraden Draht und reguliert durch Abzweigung die Ströme in beiden so, daß man in derselben Zeit dieselben Ausschläge α_s und α und demnach auch dieselben Wärmemengen Q_s und Q wie früher, als die Spule und Draht von demselben oszillatorischen Strom durchflossen waren, erhält. Dann ist

$$(2) \quad \frac{Q_s}{Q} = \frac{i_s^2 w_s}{i^2 w},$$

wenn i_s der Strom in der Spule, i derjenige im geraden Draht, und w_s bez. w die Gleichstromwiderstände der Spule und des geraden Drahtes sind. Das Verhältnis $w_s:w$ ergibt sich also, sobald man die Gleichströme i_s und i und die Gleichstromwiderstände w_s und w bestimmt hat. Der prinzipielle Vorteil der Methode liegt darin, daß sie keinerlei Korrekturen erfordert.

II. Versuchsanordnung.

Die *Kalorimeter*, im wesentlichen Riesssche Luftthermometer, bestanden aus zwei Glasröhren, in welche die Spule und der gerade Draht luftdicht eingekittet waren. Jede dieser Glasröhren stand durch Gummischlauch in Verbindung mit einem Alkoholmanometer, das in eine Kapillarröhre endete. Die zwei Kapillarröhren lagen nahe beieinander, um einen kleinen Winkel gegen die Horizontale geneigt. Mittels eines Fernrohres und einer vor den Kapillaren angebrachten Skala wurde die Änderung des Luftdruckes in den Röhren abgelesen. Die Röhren wurden in Watte eingebettet und die Versuche wurden in einem Kellerraum ausgeführt, wo die Temperatur ziemlich konstant war.

Um den Einfluß einer äußeren Druckänderung, der besonders bei starken Winden sehr störend werden kann, zu vermeiden, wurden die Kapillaren in Verbindung mit einem Glasgefäß gesetzt, welches während der Messung mittels eines Hahnes verschlossen wurde.

Die *Spulen*, deren Widerstand bestimmt wurde, waren auf Ebonitröhren mit eingeschnittenen Gewinden sorgfältig ge-

wickelt. Ihre Drahtlänge war vor dem Aufwickeln und nach dem Abwickeln gemessen und das Mittel daraus als Drahtlänge der Spule (l , Gl. (1)) angenommen.

Der Schwingungskreis ist in Fig. 1 schematisch gezeichnet. AB ist die Spule, deren Widerstand w , bestimmt werden soll. DE ist der gerade Draht. GH ist eine veränderliche Selbstinduktion, durch die man die Wechselzahl des Kreises

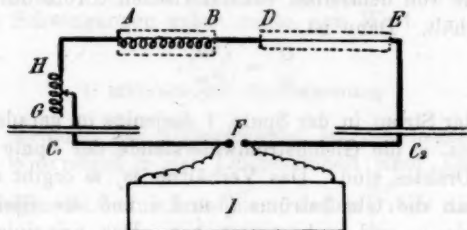


Fig. 1.

regulieren kann. C_1, C_2 sind Kondensatoren, Leidener Flaschen aus englischem Flintglas. F ist eine Funkenstrecke aus Zinkkugeln von 1,5 cm Durchmesser. I ist ein Induktor.

Der Induktor wurde meist mit Gleichstrom und Deprezunterbrecher betrieben (Entladungszahl ca. 50), bei großen Kapazitäten mit Wechselstrom der Zentrale beschickt (Wechselzahl = 100/Sek.).

Den Gleichstromkreis, der zur Bestimmung von $Q_s:Q$ nach Gleichung (2) diene, zeigt Fig. 2 in schematischer Darstellung.

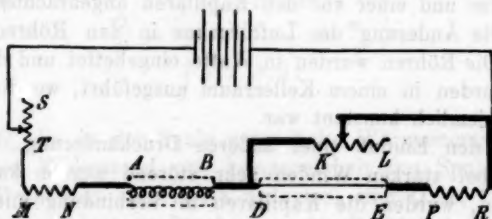


Fig. 2.

AB und DE sind wie in Fig. 1 Spule und gerader Draht. KL ist ein veränderlicher Widerstand, durch den man den

Strom, der durch den geraden Draht DE fließt, regulieren kann. MN und PR sind Normalwiderstände aus Konstantan. ST ist ebenfalls ein veränderlicher Widerstand in dem Hauptstromkreise.

Legt man in bekannter Weise¹⁾ ein empfindliches Galvanometer (benutzt wurde ein Deprez-d'Arsonvalgalvanometer von Hartmann & Braun mit direkter Ablesung) mit hohem Vorschaltwiderstand der Reihe nach als Nebenschluß zu MN , AB , PR und DE , so erhält man das gesuchte Verhältnis $i_1^2 w_1 : i_2^2 w_2$ (Gleichung (2)). Bei der Ausführung der Messungen wurde mit Rücksicht auf praktische Bedürfnisse der Normalwiderstand PR (Fig. 2) in dem Nebenzweig mit KL eingeschaltet. Prinzipiell ist dadurch nichts geändert.

Der Gang einer Messung war der folgende: Zuerst wurde durch Änderung der Kapazität (C_1 , C_2 , Fig. 1) und Selbstinduktion (GH , Fig. 1) der Schwingungskreis in Resonanz gebracht mit einem Normalschwingungskreis, dessen Wechselzahl bekannt war. Wenn die Manometer zeigten, daß alles im Wärmegleichgewicht war, wurde der Induktorstrom eine bestimmte Zeit geschlossen. Diese Zeit war niemals länger als 1,5 Min. und nur ausnahmsweise länger als 1 Min. Nachdem der Strom unterbrochen war, wurden die Ausschläge in den Kapillarröhren abgelesen. Dann wartete man, bis alles wieder im Wärmegleichgewicht war, und machte eine weitere Beobachtung in derselben Weise. Nachher wurde die Anordnung Fig. 2 hergestellt, Gleichstrom durch die Spule und den geraden Draht geschickt, und die Widerstände so reguliert, daß man dieselben Ausschläge in den Kapillaren in derselben Zeit erhielt, wie sie früher beobachtet waren. Dieses Regulieren der Widerstände, das auf den ersten Blick sehr umständlich zu sein scheint, geht, wenn man erst einige Übung erlangt hat, sehr rasch vonstatten. Schließlich wurde mittels der Normalwiderstände in dem Kreise und des Galvanometers das gesuchte Verhältnis $i_1^2 w_1 : i_2^2 w_2$ (Gleichung (2)) bei demselben Strom bestimmt.

1) F. Kohlrausch, Prakt. Physik p. 388.

Tabelle I.
Resultate der Messungen.

Spule	Durchmesser des Drahtes in cm	Ganghöhe in cm	Länge der Spule in cm	Äußerer Durch- messer der Spule in cm	w_s/w		Korrektionsfaktor für die aus der Sommerfeldschen Theorie berechneten Werte von w_s/w
					aus der Sommerfeld- schen Theorie berechnet	experimentell bestimmt	
Wechselzahl der Schwingungen pro Sekunde = $1 \cdot 10^6$.							
1	0,15	0,25	20	1,7	3,35	1,89	0,56
2	0,15	0,25	20	3,2	3,35	1,88	
3	0,15	0,3	10	0,75	3,35	1,55	
4	0,15	0,3	10	1,7	3,35	1,63	0,50
5	0,15	0,3	10	3,2	3,35	1,60	
6	0,15	0,3	10	7,2	3,35	1,52	
7	0,15	0,3	20	0,75	3,35	1,55	
8	0,15	0,3	20	1,7	3,35	1,66	
9	0,15	0,3	20	3,2	3,35	1,66	
10	0,15	0,3	20	7,2	3,35	1,59	
11	0,15	0,5	10	1,7	3,35	1,25	0,38
12	0,15	0,5	10	3,2	3,35	1,26	
13	0,15	0,5	10	7,2	3,35	1,20	
14	0,15	0,5	20	1,7	3,35	1,29	
15	0,15	0,5	20	3,2	3,35	1,30	
16	0,15	0,5	20	7,2	3,35	1,25	0,54
17	0,3	0,5	20	2,0	3,44	1,87	
18	0,3	0,5	20	3,5	3,44	1,87	
19	0,3	0,5	20	7,6	3,44	1,85	0,38
20	0,3	1,0	20	2,0	3,44	1,30	
21	0,3	1,0	20	3,5	3,44	1,30	
22	0,3	1,0	20	7,6	3,44	1,28	
Wechselzahl der Schwingungen pro Sekunde = $5 \cdot 10^6$.							
8a	0,15	0,3	20	1,7	3,46	1,72	0,50
17a	0,3	0,5	20	2,0	3,51	1,86	0,53

Die Zahlen, welche die Tabelle enthält, sind die Resultate der endgültigen Messungen. Es kann für dieselben eine Genauigkeit von etwa 3 Proz. garantiert werden, was durch Wiederholung der Versuche unter abgeänderten Bedingungen immer wieder kontrolliert wurde. Zum Beispiel wurde das Verhältnis $w_s:w$ für die Spule 8 im Dez. 1904 gleich 1,68 gefunden und im März 1905 mit einer etwas geänderten Anordnung des Apparates gleich 1,66. Ebenso ergab sich für die Spule 12 im Dez. 1904 $w_s:w$ 1,24 und im Mai 1905 1,26. Da die Messungen ziemlich zeitraubend waren, so habe ich dieselben so disponiert, daß sie trotz ihrer verhältnismäßig geringen Zahl möglichst klar hervortreten lassen, in welcher Weise das Verhältnis $w_s:w$ von den verschiedenen Größen abhängt (vgl. p. 164ff.).

Vorausgegangen waren diesen endgültigen Messungen eine große Anzahl von Versuchen, die zur Orientierung dienen sollten und bei denen sämtliche Bedingungen möglichst stark variiert wurden. Insbesondere wurde untersucht, ob das Verhältnis $w_s:w$ anders ausfällt, wenn die Spule frei in Luft steht, als wenn sie auf einem Ebonitrohr aufgewickelt ist. Aus diesen Vorversuchen ging hervor, daß das Vorhandensein eines Ebonitkernes einen merkbaren Einfluß nicht ausübt.

Allgemeines Ergebnis.

In dem Bereiche, in welchem sich die Versuche bewegen, gilt:

a) Der effektive Widerstand w , von aufgespulten Drähten kann, wie schon aus den Messungen von Battelli und Magri hervorgeht, bis etwa zweimal größer sein als derjenige w von geraden Drähten unter denselben Bedingungen. Daraus folgt einerseits, daß es sich bei dem effektiven Spulenwiderstand keineswegs nur um eine kleine Korrektur an dem effektiven Widerstand von geraden Drähten handelt, andererseits, daß das Verhältnis des effektiven Spulenwiderstandes zu demjenigen von geraden Drähten bei weitem nicht dieselbe Größe erreichen kann, wie etwa das Verhältnis des effektiven Widerstandes von geraden Drähten bei Schwingungen zu dem Widerstand bei stationärem Strom.

b) Ist die Wechselzahl und der Drahtradius so groß, daß

$$k^1) = r \cdot \pi \sqrt{\frac{n \cdot \sigma}{2}}$$

(r = Drahtradius, n = Wechselzahl pro Sekunde, σ = Leitvermögen des Drahtes) groß ist gegen 1, mindestens etwa 6, d. h. daß bei einem geraden Draht die Strömung merklich auf eine dünne Oberflächenschicht beschränkt wäre, so ist das Verhältnis $w:w$ sowohl von der Wechselzahl als von dem Spulendurchmesser sehr wenig abhängig (vgl. Spulen 17–22 und Spule 17 mit 17a).

c) Das Verhältnis $w:w$ ist bei derselben Ganghöhe und unter sonst gleichen Umständen um so größer, je größer der Drahtradius ist (vgl. Spulen 11–16 mit 17–19).

d) Es ist, wie von vornherein zu erwarten war, um so größer, je kleiner die Ganghöhe ist (vgl. Spulen 1–2 mit 3–10 und 11–16 und Spulen 17–19 mit 20–22).

e) Der Wert von $w:w$ ist um so größer, je größer das Verhältnis von Spulenlänge zu Spulendurchmesser ist. Ist dieses Verhältnis aber einmal etwa gleich 6–10 geworden, so steigt der Wert von $w:w$ nur noch sehr wenig (vgl. Spule 3 und 7, 4 und 8, 5 und 9, 6 und 10, ebenso 11 und 14, 12 und 15, 13 und 16). Spulen die sechs- bis zehnmal länger sind als breit, verhalten sich also für den vorliegenden Zweck merklich wie unendlich lange Spulen.

Vergleich mit der Theorie von Sommerfeld.

Bei meinen Messungen war der Ausdruck:

$$2 \pi r \sqrt{2 \pi \cdot n \cdot \sigma}$$

1) Es ist nämlich in meinen Versuchen

$2r$ in cm	n pro Sekunde	k
0,15	$1 \cdot 10^8$	4,03
0,3	$1 \cdot 10^8$	8,06
0,15	$5 \cdot 10^8$	9,00
0,3	$5 \cdot 10^8$	18,01

sets sehr groß gegen 1 (> 28). Für diesen Fall ist nach Sommerfeld (p. 687 (22) und p. 689 18'))¹⁾

$$\frac{w_s}{w} = \pi r \sqrt{2 \pi n \sigma},$$

d. h.

$$(3) \quad \frac{w_s}{w} = \frac{\pi r \sqrt{2 \pi n \sigma}}{w/w},$$

wo, wie früher, w_s den Widerstand pro Längeneinheit des Spulendrahtes bei Schwingungen, w den Widerstand pro Längeneinheit des geraden Drahtes bei Schwingungen, und w den Widerstand pro Längeneinheit des Drahtes bei Gleichstrom bedeuten.

Ist $k = \pi r \sqrt{n \cdot \sigma / 2}$ groß gegen 1, mindestens etwa 6, so gilt bekanntlich um so genauer, je größer k ist,

$$\frac{w_s}{w} = k.$$

Ist k kleiner als etwa 6, so ist w_s/w größer als k und zwar entfernt sich das Verhältnis w_s/w vom Wert k um so mehr, je kleiner k ist.²⁾

Es ist in meinen Versuchen

k	$\frac{w_s}{w}$
4,03	4,29
8,06	8,33
9,00	9,28
18,01	18,80

(wo w/w nach der vollständigen Rayleighschen Formel berechnet ist).

Für Werte von k , die größer als 6 sind, gilt also nach Sommerfeld

$$\frac{w_s}{w} = \frac{r \cdot \pi \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n \cdot \sigma}}{r \cdot \pi \sqrt{\frac{n \cdot \sigma}{2}}} = 2 \cdot \sqrt{\pi} = 3,54,$$

1) Bei Sommerfeld bedeutet n die Wechselzahl in π Sekunden.

2) Vgl. z. B. J. Zenneck, Elektromagn. Schwingungen p. 993.

während bei kleineren Werten von k

$$\frac{w_2}{w} < 3,54,$$

und zwar um so kleiner ist, je geringer der Wert von k ist.

Die Gleichung (3) von Sommerfeld sagt also *qualitativ* aus:

a) Das Verhältnis $w_2:w$ ist bei demselben Drahradius unter allen Umständen unabhängig vom Spulendurchmesser.

b) Solange k kleiner ist als etwa 6, nimmt $w_2:w$ mit zunehmender Wechselzahl und zunehmendem Drahradius zu; aber um so weniger rasch, je größer k ist.

c) Je größer k ist, um so mehr *nähert sich* $w_2:w$ *einem konstanten, von der Wechselzahl und dem Drahradius unabhängigen Wert*, der ungefähr erreicht ist, wenn k etwa gleich 6 ist.

Es folgt also aus meinen Resultaten unmittelbar die Richtigkeit von a), insofern als bei den Messungen, die überhaupt einen Vergleich mit der Sommerfeldschen Theorie gestatten (Voraussetzung unendlich langer Spulen! (vgl. p. 164, e)), tatsächlich das Verhältnis $w_2:w$ sich mit dem Spulendurchmesser nur äußerst wenig ändert (p. 164, b). Auch den Punkt b) bestätigen meine Messungen. Im Gebiete $k < 6$ nimmt $w_2:w$ sowohl mit steigendem Drahradius zu (vgl. Spulen 11—16 mit 17—19 und Spule 8a mit 17a), als auch mit steigender Wechselzahl (vgl. Spule 8 mit 8a). Die Richtigkeit von c) folgt aus meinen Messungen insoweit, als $w_2:w$ bei $k > 6$ tatsächlich von der Wechselzahl unabhängig ist (vgl. Spulen 17—19 und 17a). Von dem Drahradius ist es nach meinen Messungen nicht unabhängig (vgl. Spulen 8a und 17a). Daß in diesem Punkt die Theorie, welche die Spulen von endlicher Ganghöhe durch eine Röhre ersetzt, versagen muß, ist von vornherein sehr wahrscheinlich. Der von der Ganghöhe abhängige Korrektionsfaktor, mit dem der Sommerfeldsche Ausdruck für $w_2:w$ zu versehen wäre (in Tab. I, letzte Kolumne)¹⁾, scheint nach meinen Messungen nur eine Funktion des *Verhältnisses von Ganghöhe zu Drahradius* zu sein (vgl. Spulen 1 und 2 mit 17 und 18 und Spulen 14 und 15 mit 20 und 21).

1) Die Zahlen sind nach der Grenzformel berechnet, welche die Sommerfeldsche Theorie für das Verhältnis $w_2:w$ liefert. Diese Grenzformel war auf meine Versuche ohne weiteres anwendbar, weil der Wert von $2\pi r\sqrt{2\pi n\sigma}$ bei meinen Versuchen stets größer als 28 ist.

B.

Das Bisherige bezog sich ausschließlich auf den Fall von Spulen, deren Länge (längs der Achse gemessen) im Verhältnis zum Durchmesser jedenfalls nicht klein ist. Außer dieser Art von Spulen benutzt man aber sowohl bei Laboratoriumsversuchen mit schnellen Schwingungen als auch in der Praxis der drahtlosen Telegraphie Spulen, die aus wenigen Windungen von relativ sehr großem Durchmesser bestehen, deren Achse also gegen den Durchmesser einer Windung extrem kurz ist — Spulen, wie man sie etwa erhält, wenn man fünf Windungen von 30 cm Durchmesser sehr nahe nebeneinander wickelt.

Ich habe auch von einigen Spulen dieser Art das Verhältnis $w_1:w$ bestimmt mit derselben Methode, die ich im vorhergehenden beschrieben habe. Der einzige Unterschied in der Anordnung bestand darin, daß das Glasgefäß, welches die Spule enthält, entsprechend den veränderten Dimensionen der Spulen die Gestalt Fig. 3 bekam. Der obere Teil bestand aus einer Spiegelglasplatte, die mit Siegellack und Kolophoniumkitt aufgekittet war.

Aus den Messungen geht hervor, daß bei derselben Wechselzahl und demselben Durchmesser der Windungen das Verhältnis $w_1:w$ zunimmt 1. bei demselben Drahradius und derselben Ganghöhe mit der Anzahl der Windungen (vgl. Spule 1 mit 2), 2. mit Verkleinerung der Ganghöhe bei konstantem Drahradius (vgl. Spule 1 mit 3, und Spule 4 mit 5), oder bei derselben Ganghöhe mit Vergrößerung des Drahradius (vgl. Spule 3 mit 4).

Nach den Spulen 3 und 5 scheint es, daß das Verhältnis $w_1:w$ bei derselben Wechselzahl und demselben Spulen-

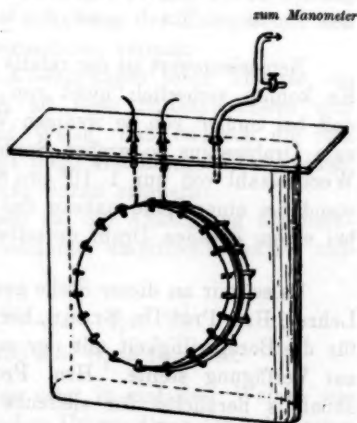


Fig. 3.

durchmesser, wie bei den Spulen der Form A, nur abhängt von dem Verhältnis des Drahradius zur Ganghöhe.

Tabelle II.

Resultate.

Wechselzahl der Schwingungen pro Sekunde = $1 \cdot 10^6$.

Spule	Durchmesser der Spule in cm	Durchmesser des Drahtes in cm	Ganghöhe in cm	Anzahl der Windungen	$\frac{w_s}{w}$		
					Messung (1)	Messung (2)	Mittel- wert
1	30	0,15	0,3	10	1,39	1,39 (5)	1,39
2	30	0,15	0,3	5	1,27	1,31	1,29
3	30	0,15	0,5	10	1,12	1,12	1,12
4	30	0,3	0,5	5	1,47	1,47	1,47
5	30	0,3	1,0	5	1,14	1,12	1,13

Bemerkenswert ist der relativ große absolute Wert von $w_s:w$. Es konnte sicherlich nicht von vornherein erwartet werden, daß bei Spulen von so wenigen Windungen und einem relativ zum Drahradius so großen Spulendurchmesser und bei einer Wechselzahl von nur $1 \cdot 10^6$ pro Sekunde, der effektive Widerstand bei einer Spule nahezu das $1\frac{1}{2}$ fache betragen kann als bei einem geraden Draht derselben Länge.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. Braun, herzlichsten Dank auszusprechen für die Bereitwilligkeit mit der er mir die Mittel des Institutes zur Verfügung stellte. Hrn. Prof. Dr. Zenneck danke ich ebenfalls herzlichst für vielfache Ratschläge und freundliche Hilfe bei der Ausführung meiner Arbeit.

(Eingegangen 9. November 1905).

9. Beitrag zu der Theorie der radioaktiven Umwandlung; von P. Gruner.

Es ist keine Frage, daß heutzutage die Auffassung der radioaktiven Erscheinungen als Äußerungen eines Umwandlungsprozesses der Atome immer mehr an Ansehen gewinnt.¹⁾ Diese Theorie, die zuerst von Rutherford und Soddy aufgestellt und von ihnen in äußerst geistvoller Weise durchgeführt worden ist, scheint in der Tat außerordentlich geeignet, die oft komplizierten empirischen Gesetze der induzierten Aktivität aus einer einfachen theoretischen Grundlage abzuleiten, ganz abgesehen davon, daß jene Theorie am besten das Prinzip der Erhaltung des Stoffes und dasjenige der Erhaltung der Energie mit den radioaktiven Phänomenen auszusöhnen vermag.

Verfolgt man aber die Ausführungen jener Theorie, so nimmt man wahr, daß sich oft neue Hilfsypothesen einschleichen, in einer Art und Weise, daß dadurch die rein theoretischen Grundlagen nicht mehr klar innegehalten werden.

Ein einfaches Beispiel mag daran erinnern:

Curie und Danne haben für die Abklingung der induzierten Radiumaktivität die bekannte, empirische Formel aufgestellt:

$$J_t = J_0 \left(a \cdot e^{-\frac{t}{\Theta_1}} - (a-1) e^{-\frac{t}{\Theta_2}} \right)$$

$$a = 4,20; \Theta_1 = 2420 \text{ sec}; \Theta_2 = 1860 \text{ sec}.$$

Die Theorie des Atomzerfalles zeigt in einfacher Weise, wie diese Formel aus einer zweifachen Umwandlung der induzierten Aktivität abgeleitet werden kann. Rutherford ist jedoch weiter gegangen.²⁾ Er hat nachgewiesen, daß unter der Voraussetzung der Entstehung eines einzigen Atomes aus jedem zerfallenden Atom, die Konstante $a = \Theta_1 / (\Theta_1 - \Theta_2)$ sein müßte, wenn bei dem einen Umwandlungsprozeß eine reine Umlagerung,

1) P. Curie et J. Danne, Sur la radioactivité induite. Le Radium. II. p. 209. 1905.

2) E. Rutherford, Radio-Activity. p. 274. Cambridge 1904.

ohne Elektronenstrahlung, auftreten würde. Aus der gewiß auffallenden Übereinstimmung $a = 4,20$, $\Theta_1/(\Theta_1 - \Theta_2) = 4,30$ schließt Rutherford bestimmt auf das Fehlen jener Elektronenstrahlung. Allein abgesehen von der vorhin erwähnten Hypothese ist ja die Formel von Curie und Danne in der obigen Form überhaupt unvollständig. Rutherford selber war der erste, welcher nachwies, daß dem Ausdrucke von J , noch eine dritte Exponentialfunktion mit rasch abnehmendem Exponenten beigefügt werden müsse — eine Beobachtung, die in den neuen, erweiterten Formeln von Curie und Danne verwendet wird.¹⁾ Gemäß dieser neuesten Formel ist aber die Konstante a nicht mehr gleich $\Theta_1/(\Theta_1 - \Theta_2)$, der Grund zur Rutherfordschen Annahme wird damit hinfällig. Und doch ist die neue Curiesche Formel offenbar mit Zugrundelegung der Rutherfordschen Anschauung abgeleitet, so daß hier ein eigentümliches Ineinandergreifen fraglicher Hypothesen und theoretischer Ausführungen vorliegt.

Diese sowie ähnliche Fälle lassen es deshalb wünschbar erscheinen, die Theorie der radioaktiven Umwandlungsprozesse unter Vermeidung aller sekundären Hypothesen in möglichster Allgemeinheit aufzustellen. Freilich ist gerade in der deutschen physikalischen Literatur eine vorzügliche Darstellung jener Theorie durch J. Stark schon gegeben worden.²⁾ Doch beschränkt sich seine Arbeit auf die einfachen Grundlagen der Theorie, ohne die detaillierten Ausdrücke zu berechnen, die hier mitgeteilt werden sollen.

Im folgenden sollen zunächst die leitenden Grundgedanken der Umwandlungstheorie erörtert, sodann die hypothetischen Grundlagen und die Grundgleichungen formuliert und endlich einige Konsequenzen allgemeiner und spezieller Art in ihren Resultaten angegeben werden.

A. Grundgedanken der Umwandlungstheorie.

Die Umwandlungstheorie nimmt an, daß die Erscheinungen der Radioaktivität bedingt sind durch spontane Umwandlung

1) P. Curie et J. Danne, l. c.

2) J. Stark, Gesetz und Konstanten der radioaktiven Umwandlung. Jahrb. d. Radioaktiv. 1. p. 1. 1904.

der chemischen Atome in Atome anderer Art. Diese Umwandlung soll fast ausschließlich in einer Zersetzung der Atome in Restatome und abgespaltete Elektronen (α und β Teilchen) bestehen, so daß im allgemeinen der ganze Prozeß stets begleitet ist von Elektronenstrahlung, deren Wirkung in bekannter Weise quantitativ ermittelt werden kann.

Es ist demnach scharf zu unterscheiden zwischen dem *radioaktiven Umwandlungsprozeß* selber, der innerhalb der Atome sich abspielt, und den *radioaktiven Wirkungen*, die allein unseren Instrumenten zugänglich sind und gemessen werden können. Zwischen beiden muß irgend eine Beziehung bestehen, die folgendermaßen bestimmt werden soll:

Eine radioaktive Substanz möge in einem bestimmten Zeitmoment t eine Zahl N *umwandlungsfähiger Atome* enthalten. Diese Atome werden sukzessive von dem spontan stattfindenden Umwandlungsprozeß ergriffen. Der Ausdruck $-(dN/dt)dt$ gibt die Anzahl Atome an, die während des Zeitmomentes dt jenen Prozeß erleiden, $q = -dN/dt$ kann also als Geschwindigkeit des Atomzerfalles angesehen werden; q wird nach Stark als *Wandlungsstärke* bezeichnet.

Ist q das Maß des radioaktiven Prozesses innerhalb der Atome, so wird q auch als Maß der radioaktiven Wirkung dienen können, und die einfachste Annahme wird die Proportionalität sein. Bezeichne J *diese Intensität der radioaktiven Wirkung* (z. B. gemessen durch den Sättigungsstrom der Ionisierung) zur Zeit t , so folgt $J = kq$.

Der Proportionalitätsfaktor hängt in erster Linie von der Methode der Messung von J ab, sowie von Masse und Dimensionen der untersuchten Substanz; aber auch bei derselben Versuchsreihe, ausgeführt an derselben Substanz, kann k für die aufeinanderfolgenden Umwandlungsstufen ungleiche Werte haben und namentlich auch für die Wirkung der α - oder β - oder γ -Strahlen sehr verschiedenartig ausfallen.

Das Gesetz, nach welchem die Wirkung J mit der Zeit abklingt, kann als sichergestellt angenommen werden. Sofern eine *einzig* Umwandlung der Atome auftritt, ist der Verlauf von J als Funktion der Zeit durch eine einfache Exponentialfunktion darstellbar, wobei die *Abklingungskonstante* λ als spezi-

fische, von allen außerhalb des Atoms liegenden Einflüssen vollständig unberührte Konstante anzusehen ist.¹⁾

Ist J^0 die Intensität zur Zeit $t=0$, so folgt:

$$J = J^0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

Durch Vergleich mit den obigen Formeln für J und q , und Integration derselben folgt:

$$J^0 \cdot e^{-\lambda t} = +kq = -k \frac{dN}{dt}; \quad N = \frac{J^0}{k\lambda} e^{-\lambda t} + C;$$

$$N = N^0 e^{-\lambda t}.$$

Hierbei ist N^0 die Zahl der umwandlungsfähigen Atome zur Zeit $t=0$. Es ergibt sich aus den aufgestellten Voraussetzungen, daß die Zahl der radioaktiven Atome gemäß derselben Exponentialfunktion wie J abnimmt.

Bequemer ist es, den Ausdruck für N in eine Differentialgleichung umzuformen und J in direkte Beziehung zu N zu bringen. Dies ergibt:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N; \quad q = \lambda N; \quad J = kq = k\lambda N.$$

Sobald der radioaktive Prozeß aus mehr als einer einmaligen Atomumwandlung besteht, sind diese Formeln entsprechend zu erweitern.

Es möge eine zweimalige Umwandlung angenommen werden. Sind N_1 und N_2 die zur Zeit t vorhandenen Atome erster und zweiter Art, so findet die Umwandlung der ersten in die zweite gemäß den vorigen Gleichungen statt:

$$-\frac{dN_1}{dt} = \lambda_1 N_1; \quad q_1 = \lambda_1 N_1; \quad J_1 = k_1 q_1 = k_1 \lambda_1 N_1.$$

Würde der weitere Zerfall der Atome zweiter Art in Atome dritter Art völlig ungestört verlaufen, so wäre auch hier

$$-\frac{dN_2}{dt} = \lambda_2 N_2.$$

1) Durch die neueren Untersuchungen von Curie und von Rutherford, besonders über den Einfluß der Erhitzung auf die induzierten Aktivitäten, ist diese Annahme etwas in Frage gestellt. Ebenso stimmen die Beobachtungen an Zelluloid, Paraffin, Kautschuk (S. Curie, Recherches sur les substances radioactives p. 126. Paris 1904) auch nicht mit jener Annahme. Indes sind diese Abweichungen vielleicht anders zu erklären; jedenfalls könnten sie in der Theorie erst später als sekundäre Störungen berücksichtigt werden.

Nach wie vor bleibt dieser Ausdruck bestehen für die zeitliche Abnahme der Atome zweiter Art *infolge ihres Zerfalles*, also für die Wandlungsstärke q_2 . Somit wird auch jetzt $J_2 = k_2 q_2 = k_2 \lambda_2 N_2$ sein. — Aber $q_2 = \lambda_2 N_2$ stellt nicht mehr die wirkliche Veränderung der Atomzahl N_2 in der Zeiteinheit dar; denn neben dem Zerfall dieser Atome tritt noch eine beständige Neubildung aus Atomen erster Art auf. Diese Zunahme ist leicht zu berechnen. In der Zeiteinheit zerfallen $-\frac{dN_1}{dt} = \lambda_1 N_1$ Atome erster Art. Es liegt kein Grund vor, schon jetzt anzunehmen, daß aus jedem Atom wieder nur *ein* Atom entstehe. Ganz allgemein möge ein Atom erster Art je in ν_2 Atome zweiter Art zerfallen. Die Zahl der pro Zeiteinheit entstehenden Atome zweiter Art ist demnach

$$-\nu_2 \frac{dN_1}{dt} = \nu_2 \lambda_1 N_1.$$

Die tatsächliche Abnahme der Atomzahl N_2 setzt sich also aus der Zerfallsgeschwindigkeit $\lambda_2 N_2$ und der Neubildung $\nu_2 \lambda_1 N_1$ zusammen, es folgt

$$-\frac{dN_2}{dt} = \lambda_2 N_2 - \nu_2 \lambda_1 N_1; \quad J_2 = k_2 \lambda_2 N_2.$$

Die gesamte radioaktive Wirkung ist die Summe der beiden einzelnen:

$$J = J_1 + J_2 = k_1 \lambda_1 N_1 + k_2 \lambda_2 N_2.$$

Diese Gleichungen für J und N können ohne weiteres verallgemeinert werden und liefern so die Grundgleichungen der Theorie, die nun zusammengestellt werden sollen.

B. Grundsätze der Umwandlungstheorie.

1. Die Radioaktivität einer Substanz wird definiert als ein spontan erfolgender Umwandlungsprozeß ihrer Atome.
2. Es wird angenommen, daß jede dieser Umwandlungen nach einem einfachen Exponentialgesetz mit unveränderlichen Konstanten stattfindet.
3. Es wird angenommen, daß die Intensität der radioaktiven Wirkung der momentanen Zerfallsgeschwindigkeit der Atome proportional sei.

Sind N_1, N_2, N_3, \dots die Anzahl Atome der verschiedenen Wandlungsstufen zur Zeit t , sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ die Abklingungs-

konstanten bei dem Übergang von Zustand 1 zu 2, 2 zu 3, 3 zu 4, . . . , sind $\nu_2, \nu_3, \nu_4 \dots$ die Umwandlungszahlen der Atome, so daß ν_k die Zahl der Atome k^{ter} Art angibt, die aus einem Atom $(k-1)^{\text{ter}}$ Art entstehen, ist J die gesamte radioaktive Wirkung in irgend einer Weise gemessen, sind $k_1, k_2, k_3 \dots$ die bei der betreffenden Messung auftretenden Konstanten, so gilt durch Erweiterung der vorigen Ausführungen:

$$(I) \quad \begin{cases} -\frac{dN_1}{dt} = \lambda_1 N_1; & -\frac{dN_2}{dt} = \lambda_2 N_2 - \nu_2 \lambda_1 N_1; \\ -\frac{dN_3}{dt} = \lambda_3 N_3 - \nu_3 \lambda_2 N_2; & -\frac{dN_4}{dt} = \lambda_4 N_4 - \nu_4 \lambda_3 N_3 \dots, \end{cases}$$

$$(II) \quad J = k_1 \lambda_1 N_1 + k_2 \lambda_2 N_2 + k_3 \lambda_3 N_3 + k_4 \lambda_4 N_4 + \dots$$

Diese Gleichungen (die sich völlig mit den von J. Stark gegebenen decken) sollen im folgenden für einzelne Fälle integriert werden.

C. Beispiele aus der Umwandlungstheorie.

1. Radioaktivität bei beliebig gegebenem Anfangszustand.

Die Theorie wird in einer für die meisten Fälle brauchbaren Weise ausgeführt sein, wenn wir einen Prozeß von höchstens vier aufeinanderfolgenden Umwandlungen betrachten. Sowohl bei der Betrachtung des Thorium X, als der Radiumemanation reichen vier derartige Umwandlungsstufen aus, da das Radium D im Vergleich zu den vorhergehenden Zuständen als konstant, bez. als inaktiv angesehen werden darf.

Die Gleichungen (I) und (II) sind für diesen Fall zu integrieren.

Um die Aufgabe in ihrer Allgemeinheit zu behandeln, setzen wir voraus, daß zu Beginn der Zeitrechnung bereits alle vier Zustände bestehen sollen.

Es sei für $t=0$:

$$N_1 = N_1^0; \quad N_2 = N_2^0; \quad N_3 = N_3^0; \quad N_4 = N_4^0.$$

Von der ziemlich langwierigen Integration sei nur das Resultat angegeben:

$$N_1 = N_1^0 e^{-\lambda_1 t},$$

$$N_2 = N_1^0 \frac{\lambda_1 \nu_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \left(N_2^0 - N_1^0 \frac{\lambda_1 \nu_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) e^{-\lambda_2 t},$$

$$N_3 = N_1^0 \frac{\lambda_1 \nu_2 \lambda_3 \nu_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} \\ + \left(N_2^0 \frac{\lambda_2 \nu_3}{\lambda_3 - \lambda_2} - N_1^0 \frac{\lambda_1 \nu_2 \lambda_3 \nu_3}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} \right) e^{-\lambda_2 t} \\ + \left(N_3^0 - N_2^0 \frac{\lambda_2 \nu_3}{\lambda_3 - \lambda_2} + N_1^0 \frac{\lambda_1 \nu_2 \lambda_3 \nu_3}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} \right) e^{-\lambda_3 t},$$

$$N_4 = N_1^0 \frac{\lambda_1 \nu_2 \lambda_3 \nu_3 \lambda_4 \nu_4}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} \\ + \left(N_2^0 \frac{\lambda_2 \nu_3 \lambda_4 \nu_4}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} - N_1^0 \frac{\lambda_1 \nu_2 \lambda_3 \nu_3 \lambda_4 \nu_4}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) e^{-\lambda_2 t} \\ + \left(N_3^0 \frac{\lambda_3 \nu_4}{\lambda_4 - \lambda_3} - N_2^0 \frac{\lambda_2 \nu_3 \lambda_4 \nu_4}{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)} \right. \\ \left. + N_1^0 \frac{\lambda_1 \nu_2 \lambda_3 \nu_3 \lambda_4 \nu_4}{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) e^{-\lambda_3 t} \\ + \left(N_4^0 - N_3^0 \frac{\lambda_3 \nu_4}{\lambda_4 - \lambda_3} + N_2^0 \frac{\lambda_2 \nu_3 \lambda_4 \nu_4}{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)} \right. \\ \left. - N_1^0 \frac{\lambda_1 \nu_2 \lambda_3 \nu_3 \lambda_4 \nu_4}{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) e^{-\lambda_4 t}.$$

Hieraus die gesamte radioaktive Wirkung:

$$J = \left\{ N_1^0 \lambda_1 \left(k_1 + \frac{\lambda_2 \nu_2}{\lambda_2 - \lambda_1} k_2 + \frac{\lambda_2 \nu_2 \lambda_3 \nu_3}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} k_3 + \frac{\lambda_2 \nu_2 \lambda_3 \nu_3 \lambda_4 \nu_4}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) \right\} e^{-\lambda_1 t} \\ + \left\{ N_2^0 \lambda_2 \left(k_2 + \frac{\lambda_3 \nu_3}{\lambda_3 - \lambda_2} k_3 + \frac{\lambda_3 \nu_3 \lambda_4 \nu_4}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} k_4 \right) \right. \\ \left. - N_1^0 \lambda_1 \left(\frac{\lambda_2 \nu_2}{\lambda_3 - \lambda_1} k_2 + \frac{\lambda_2 \nu_2 \lambda_3 \nu_3}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} k_3 + \frac{\lambda_2 \nu_2 \lambda_3 \nu_3 \lambda_4 \nu_4}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)} k_4 \right) \right\} e^{-\lambda_2 t} \\ + \left\{ N_3^0 \lambda_3 \left(k_3 + \frac{\lambda_4 \nu_4}{\lambda_4 - \lambda_3} k_4 \right) - N_2^0 \lambda_2 \left(\frac{\lambda_3 \nu_3}{\lambda_4 - \lambda_2} k_3 + \frac{\lambda_3 \nu_3 \lambda_4 \nu_4}{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)} k_4 \right) \right. \\ \left. + N_1^0 \lambda_1 \left(\frac{\lambda_2 \nu_2 \lambda_3 \nu_3}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} k_3 + \frac{\lambda_2 \nu_2 \lambda_3 \nu_3 \lambda_4 \nu_4}{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)} k_4 \right) \right\} e^{-\lambda_3 t} \\ + \left\{ N_4^0 \lambda_4 k_4 - N_3^0 \lambda_3 \frac{\lambda_4 \nu_4}{\lambda_4 - \lambda_3} k_4 + N_2^0 \lambda_2 \frac{\lambda_3 \nu_3 \lambda_4 \nu_4}{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)} k_4 \right. \\ \left. - N_1^0 \lambda_1 \frac{\lambda_2 \nu_2 \lambda_3 \nu_3 \lambda_4 \nu_4}{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)} k_4 \right\} e^{-\lambda_4 t}.$$

2. Abklingung der Radiumemanation.

Wie schon bemerkt, entspricht der vorhin betrachtete Fall dem vollständigen Umwandlungsprozeß der Radiumemanation.

Nach Rutherford ist dieser Prozeß: Emanation—Radium *A*—Radium *B*—Radium *C*—Radium *D*.

Läßt man Radiumemanation, die sich bis zur Sättigung über Radiumlösung gebildet hat, rasch in ein völlig inaktives Gefäß eintreten, schließt dasselbe rasch ab und beginnt *sofort* die radioaktiven Wirkungen jener frisch eingetretenen Emanation zu messen, so muß sich dieselbe aus dem vorigen Ausdruck für J ergeben, wenn man $N_2^0 = N_3^0 = N_4^0 = 0$ setzt. Das Quantum N_1^0 der eingetretenen Emanation im Augenblick des Abschießens werde direkt mit N bezeichnet. Es folgt hierfür:

$$J = N \lambda_1 \left\{ k_1 + \frac{\lambda_2 \nu_2}{\lambda_2 - \lambda_1} k_2 + \frac{\lambda_2 \nu_2 \lambda_3 \nu_3}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} k_3 + \frac{\lambda_2 \nu_2 \lambda_3 \nu_3 \lambda_4 \nu_4}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} k_4 \right\} e^{-\lambda_1 t} \\ - \left(\frac{\lambda_2 \nu_2}{\lambda_2 - \lambda_1} k_2 + \frac{\lambda_2 \nu_2 \lambda_3 \nu_3}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)} k_3 + \frac{\lambda_2 \nu_2 \lambda_3 \nu_3 \lambda_4 \nu_4}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)} k_4 \right) e^{-\lambda_2 t} \\ + \left(\frac{\lambda_2 \nu_2 \lambda_3 \nu_3}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} k_3 + \frac{\lambda_2 \nu_2 \lambda_3 \nu_3 \lambda_4 \nu_4}{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} k_4 \right) e^{-\lambda_3 t} \\ - \frac{\lambda_2 \nu_2 \lambda_3 \nu_3 \lambda_4 \nu_4}{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)} k_4 e^{-\lambda_4 t}.$$

Da die Werte von $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ für die Radiumumwandlungen ziemlich genau bekannt zu sein scheinen, sollte es sich durch die eben skizzierte Versuchsanordnung verhältnismäßig leicht zeigen lassen, ob die Abklingung der Emanation wirklich durch eine derartige Summe von vier Exponentialfunktionen mit vorgeschriebenem Exponenten darstellbar ist. — Natürlich kommen nur kurze Zeiten in Betracht, da bei größerem t die erste Exponentialfunktion $e^{-\lambda_1 t}$ alle anderen überwiegt und den normalen Abfall der Emanation ergibt (in ca. vier Tagen die Hälfte).

Im allgemeinen wird das Gefäß, in welchem die Emanation aufgefangen wird, so dickwandig sein, daß die ganze radioaktive Wirkung den β -Strahlen allein zugeschrieben werden kann. Nach den Rutherfordschen Untersuchungen ist ein einziger der vier Umwandlungsprozesse von β -Strahlung begleitet, und zwar der letzte, von Radium C in Radium D . Demnach müßte in diesem Falle nur die vierte radioaktive Wirkung zur Geltung kommen, also ist $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ zu setzen. Es folgt daraus

$$J = N \lambda_1 \nu_2 \lambda_3 \nu_3 \lambda_4 \nu_4 k_4 \left\{ \frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)} \right. \\ \left. + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} - \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)} \right\}.$$

Dieser Fall wäre zur Prüfung der Theorie ganz besonders geeignet. Denn hier lassen sich aus den bekannten Werten der λ sämtliche Konstanten bis auf einen Proportionalitätsfaktor zum voraus berechnen und die Beobachtungen direkt mit den Forderungen der Theorie vergleichen. Es müßte sich daraus ziemlich sicher ermitteln lassen, ob die eben erwähnte Annahme betreffend β -Strahlung berechtigt sei oder nicht. — In der mir zugänglichen Literatur habe ich jedoch keine Versuche gefunden, deren Angaben in diesem Sinne verwertbar wären.

3. Bildung der induzierten Radiumaktivität.

Läßt man Radiumemanation in verschlossenem Gefäß über Radiumlösung während längerer Zeit sich bilden, so entsteht ein stationärer Gleichgewichtszustand. Der Raum ist mit einer konstant bleibenden Emanationsmenge $N_1 = N$ angefüllt, die Wände des Gefäßes sind mit konstanten, induzierten Aktivitäten aller drei Arten bedeckt. Taucht man jetzt einen völlig inaktiven Körper in dieses Gefäß, so nimmt er induzierte Aktivität an, wobei für ihn die Emanationsmenge N allein in Betracht kommt, nicht die an den Gefäßwänden abgelagerten Aktivitäten. Der Körper selber ist im Augenblick des Eintauchens völlig frei von radioaktiven Atomen. Also ist zur Zeit $\Theta = 0$: $N_1 = N$, $N_2 = N_3 = N_4 = 0$.

Der Körper bedeckt sich allmählich mit den drei Atomgattungen A , B und C ; nach einer Zeit Θ werde er herausgenommen; die angelagerten Atomzahlen N_1 , N_2 , N_3 , sowie seine Schlußaktivität ergeben sich aus dem Gleichungssystem:

$$(I) \quad \begin{cases} -\frac{dN_1}{d\Theta} = \lambda_2 N_2 - \nu_2 \lambda_1 N_1, & -\frac{dN_2}{d\Theta} = \lambda_3 N_3 - \nu_3 \lambda_2 N_2, \\ & -\frac{dN_4}{d\Theta} = \lambda_4 N_4 - \nu_4 \lambda_3 N_3; \end{cases}$$

$$(II) \quad J = k_2 \lambda_2 N_2 + k_3 \lambda_3 N_3 + k_4 \lambda_4 N_4.$$

Vorausgesetzt ist natürlich, daß der Körper nicht etwa die gasförmige Emanation absorbiere, oder doch an der Oberfläche haftend mitführe. Ein solcher Umstand müßte wesentlich störend auf den Wert von J einwirken.

Die Integration der obigen Gleichungen ergibt:

$$N_2 = N \lambda_1 v_2 \frac{1 - e^{-\lambda_2 \Theta}}{\lambda_2},$$

$$N_3 = N \lambda_1 v_2 \lambda_3 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_2 \Theta}}{\lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_2)} - \frac{1 - e^{-\lambda_3 \Theta}}{\lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_2)} \right),$$

$$N_4 = N \lambda_1 v_2 \lambda_3 \lambda_4 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_2 \Theta}}{\lambda_2 (\lambda_4 - \lambda_2) (\lambda_3 - \lambda_2)} - \frac{1 - e^{-\lambda_3 \Theta}}{\lambda_3 (\lambda_4 - \lambda_3) (\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{1 - e^{-\lambda_4 \Theta}}{\lambda_4 (\lambda_4 - \lambda_3) (\lambda_4 - \lambda_2)} \right);$$

$$J = N \lambda_1 v_2 \left\{ \left(k_2 + \frac{\lambda_3 v_3}{\lambda_3 - \lambda_2} k_3 + \frac{\lambda_3 v_3 \lambda_4 v_4}{(\lambda_4 - \lambda_2) (\lambda_3 - \lambda_2)} k_4 \right) (1 - e^{-\lambda_2 \Theta}) - \left(\frac{\lambda_3 v_3}{\lambda_3 - \lambda_2} k_3 - \frac{\lambda_3 v_3 \lambda_4 v_4}{(\lambda_4 - \lambda_3) (\lambda_3 - \lambda_2)} k_4 \right) \cdot (1 - e^{-\lambda_3 \Theta}) + \frac{\lambda_3 v_3 \lambda_4 v_4}{(\lambda_4 - \lambda_3) (\lambda_4 - \lambda_2)} k_4 (1 - e^{-\lambda_4 \Theta}) \right\}.$$

4. Abklingung der induzierten Radiumaktivität.

Die Verbindung der eben erhaltenen Resultate mit denjenigen des Falles (1) liefern in allgemeiner Form den Ausdruck, nach welchem die Wirkung der induzierten Aktivität mit der Zeit abklingt.

Im Falle (1) ist die Abklingung gegeben für willkürliche Anfangswerte: $N_1 = N_1^0$, $N_2 = N_2^0$, $N_3 = N_3^0$, $N_4 = N_4^0$. Setzt man hierfür die Schlußwerte des eben aus der Emanation gezogenen Körpers, also für $t = 0$: $N_1 = 0$, N_2 , N_3 , N_4 entsprechend den Werten des Falles (3), so erhält man die Abklingungsformel.

Bei dieser Substitution heben sich eine Reihe von Ausdrücken weg; es resultiert:

$$J = N \lambda_1 v_2 \left\{ \left(k_2 + \frac{\lambda_3 v_3}{\lambda_3 - \lambda_2} k_3 + \frac{\lambda_3 v_3 \lambda_4 v_4}{(\lambda_4 - \lambda_2) (\lambda_3 - \lambda_2)} k_4 \right) (1 - e^{-\lambda_2 \Theta}) e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_3 v_3}{\lambda_3 - \lambda_2} \left(k_3 + \frac{\lambda_4 v_4}{\lambda_4 - \lambda_3} k_4 \right) (1 - e^{-\lambda_3 \Theta}) e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_3 v_3 \lambda_4 v_4}{(\lambda_4 - \lambda_3) (\lambda_4 - \lambda_2)} k_4 (1 - e^{-\lambda_4 \Theta}) e^{-\lambda_1 t} \right\}.$$

Dies ist der vollständige Ausdruck für die radioaktive Wirkung eines Körpers, der während Θ Sek. in gesättigter Emanation sich befand, und sodann t Sek. außerhalb derselben verweilte.

5. Vergleichung mit Beobachtungsergebnissen.

Für den hier erörterten Fall geben Curie und Danne neuerdings folgende Formel¹⁾:

$$J = J_1 \left\{ \lambda (1 - e^{-a\theta}) e^{-at} - \frac{c}{b-c} \cdot \frac{a}{a-b} (1 - e^{-b\theta}) e^{-bt} + \frac{b}{b-c} \cdot \frac{a}{a-c} (1 - e^{-c\theta}) e^{-ct} \right\}.$$

Hier entsprechen a, b, c unseren Konstanten $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, während λ eine abgekürzte Bezeichnung für die kompliziert gebaute Konstante von $e^{-\lambda_1 t}$ ist.

Diese Formel ergibt sich ohne weiteres aus dem von uns abgeleiteten Ausdruck unter Verwendung der beiden Spezialhypothesen von Rutherford:

1. Jedes zerfallende Atom soll immer nur *ein* neues Atom liefern, also ist $\nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 1$ zu setzen.

2. Der *dritte Verwandlungsprozeß* (Radium B in Radium C) soll *keine Elektronenstrahlen erzeugen*, seine radioaktive Wirkung sei Null, also ist $k_3 = 0$ zu setzen.

Unser Ausdruck (4) nimmt dann, wenn K und C abgekürzte Bezeichnungen für Konstanten sind, die Form an:

$$J = K \left\{ C(1 - e^{-\lambda_1 \theta}) e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} \cdot \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 \theta}) e^{-\lambda_3 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_4 - \lambda_3} \cdot \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_3} (1 - e^{-\lambda_4 \theta}) e^{-\lambda_4 t} \right\},$$

also genau übereinstimmend mit der Curieschen Formel.

Hier liegt der Punkt, auf den schon am Anfange dieser Arbeit aufmerksam gemacht wurde. — Die von Curie und Danne als allgemein gültig abgeleitete Formel beruht auf zwei Spezialhypothesen, von denen die zweite sich eben als ziemlich *willkürlich* aufweist.

Die Willkürlichkeit dieser Annahme ist leicht zu zeigen.

1) P. Curie u. J. Danne, Le Radium II. p. 209. Dort ist der erste Bruch des zweiten Gliedes nicht $c/b-c$, sondern $b/b-c$ gesetzt. Es ist dies jedenfalls ein Druckfehler, da sonst die angegebene Symmetrie zwischen b und c nicht mehr bestehen würde.

Nach den Angaben von Curie gelten folgende Werte für die vier Konstanten λ :

$$\lambda_1 = 0,000002012,$$

$$\lambda_2 = 0,00401,$$

$$\lambda_3 = 0,000538,$$

$$\lambda_4 = 0,000413.$$

Läßt man die Exposition des zu induzierenden Körpers einige Stunden dauern, so sinken die Exponentialfunktionen $e^{-\lambda_1 t}$, $e^{-\lambda_2 t}$, $e^{-\lambda_3 t}$ auf einige Tausendstel und dürfen vernachlässigt werden. Wird ferner der induzierte Körper erst ca. $\frac{1}{3}$ Stunde nach Herausnahme aus der Emanation untersucht, so ist auch die Exponentialfunktion $e^{-\lambda_4 t}$ so weit abgeklungen, daß sie zu vernachlässigen ist.

Für $e^{-\lambda_1 t} = e^{-\lambda_2 t} = e^{-\lambda_3 t} = e^{-\lambda_4 t} = 0$ wird unser Ausdruck (4) von J :

$$J = N \lambda_1 \nu_2 \lambda_3 \nu_3 \left\{ \frac{\lambda_3 \nu_4 k_4}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} e^{-\lambda_4 t} - \left(\frac{k_3}{\lambda_3 - \lambda_2} + \frac{\lambda_4 \nu_4 k_4}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \right) e^{-\lambda_3 t} \right\}$$

oder

$$J = K \left\{ \frac{\lambda_3}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} e^{-\lambda_4 t} - \left(\frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} \frac{k_3}{\nu_4 k_4} + \frac{\lambda_4}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \right) e^{-\lambda_3 t} \right\}.$$

Für diese Versuchsanordnung gilt aber die bekannte, empirische Formel von Curie:

$$J_t = J_0 (a e^{-\lambda_1 t} - (a-1) e^{-\lambda_2 t}), \quad a = 4,2.$$

Die Vergleichung beider Ausdrücke verlangt:

$$\frac{\lambda_3}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \sim a, \quad \left(\frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} \frac{k_3}{\nu_4 k_4} + \frac{\lambda_4}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} \right) \sim (a-1).$$

Hieraus ist das Verhältnis $k_3/\nu_4 k_4$ berechenbar, es ergibt 0,14. Unter der gewöhnlichen Annahme $\nu_4 = 1$ folgt $k_3 = 0,14 k_4$, d. h. die Konstante k_3 der dritten Umwandlung ist etwas größer als $\frac{1}{10}$ derjenigen k_4 der vierten Umwandlung.

Es ist selbstverständlich nicht leicht, ein Urteil über die Genauigkeit der Werte von λ sich zu bilden; so ist es auch nicht möglich, zu beurteilen, wie weit jener numerische Wert $k_3 = 0,14 k_4$ als gültig anzusehen ist. Aber doch geht mit Bestimmtheit hervor, daß bei den gegenwärtig bekannten Werten von λ die Voraussetzung, daß der Umwandlungsprozeß

von Radium *B* in Radium *C* ohne Elektronenstrahlung erfolge, nicht statthaft ist. Denn ein Vernachlässigen von k_3 gegenüber dem nur siebenmal größeren k_4 ist unzulässig.

Es ist übrigens leicht einzusehen, wie aus unseren Formeln die Rutherfordsche Annahme abzuleiten ist. Seine Berechnung stützt sich auf die Voraussetzung, daß der zweite Umwandlungsprozeß von Radium *A* in Radium *B* so rasch erfolge, daß derselbe nicht zu berücksichtigen sei.

Es ist also in unserem Ausdruck (4) zunächst

$$e^{-\lambda_2 \theta} = e^{-\lambda_3 \theta} = e^{-\lambda_4 \theta} = e^{-\lambda_1 t} = 0$$

zu setzen; ferner sind die zwei Spezialhypothesen einzuführen: $\nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 1$ und $k_3 = 0$. Es folgt

$$J = N \lambda_1 k_4 \left(\frac{\lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} e^{-\lambda_4 t} - \frac{\lambda_2 \lambda_4}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{-\lambda_3 t} \right).$$

Hierin wird jetzt noch $\lambda_2 = \infty$ gesetzt, was einem unendlich raschen Abklingen des zweiten Umwandlungsprozesses entspricht:

$$J = K \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_3} e^{-\lambda_4 t} - \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_3} e^{-\lambda_3 t} \right).$$

Der Vergleich dieses Ausdruckes mit der bekannten empirischen Curieschen Formel gibt

$$a = \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_3}, \quad a - 1 = \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_3},$$

woraus nun in der Tat die Übereinstimmung folgt:

$$a = 4,2, \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_3} = 4,3.$$

Allein, ob es eben statthaft ist, $\lambda_2 = \infty$ zu setzen im Vergleich zu λ_3 und λ_4 , wenn λ_2 nicht einmal das 10fache des kleinsten Wertes λ_4 beträgt, das ist jedenfalls außer Frage.

Diese Ausführungen, die in keiner Weise die hochinteressante Theorie Rutherfords beeinträchtigen sollen, sondern im Gegenteil ganz im Sinne derselben liegen, zeigen nur, wie wichtig es ist, eine möglichst vollständige theoretische Grundlage zu besitzen, bevor bestimmte Schlüsse auf die Art und Weise der radioaktiven Wirkungen gezogen werden.

Bern, im Dezember 1905.

(Eingegangen 9. Dezember 1905.)

**10. Methode zur getrennten Untersuchung
der Schwingungen gekoppelter Oszillatoren;
von Curt Fischer.**

Werden zwei Kondensatorkreise oder andere elektrische Oszillatoren gleicher Wechselzahl nicht extrem lose miteinander gekoppelt, so entstehen bekanntlich in jedem Kreise zwei Schwingungen von verschiedener Wechselzahl und Dämpfung. Wenn man diese beiden Schwingungen zur Bestimmung ihrer Wechselzahl und Dämpfung nach der Hertz-Bjerknesschen Resonanzmethode auf einen Meßkondensatorkreis von variabler Wechselzahl einwirken läßt, so erhält man Resonanzkurven mit zwei Maximis.¹⁾

Diese Resonanzkurven können so beschaffen sein, daß die Kurve zwischen den beiden Maximis eine Strecke weit mit

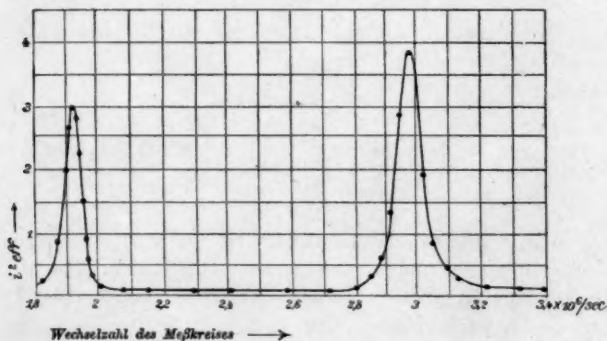


Fig. 1.

der Abszissenachse zusammenfällt oder wenigstens sehr nahe an dieselbe herantritt (Fig. 1). Dann ergibt die Anwendung der Bjerknesschen Beziehungen auf die beiden Teile der Kurve unmittelbar Wechselzahl und Dekrement der beiden

1) Vgl. dazu und zum Folgenden J. Zenneck, Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie p. 657 ff. Stuttgart 1905.

Schwingungen. Dieser Fall tritt ein, wenn die Wechselzahlen der beiden Schwingungen genügend verschieden, d. h. wenn die beiden Kondensatorkreise genügend fest gekoppelt sind.

Ist die Koppelung sehr lose und deshalb der Unterschied zwischen den Wechselzahlen der beiden Schwingungen nur gering, so nimmt die Resonanzkurve etwa die Gestalt von

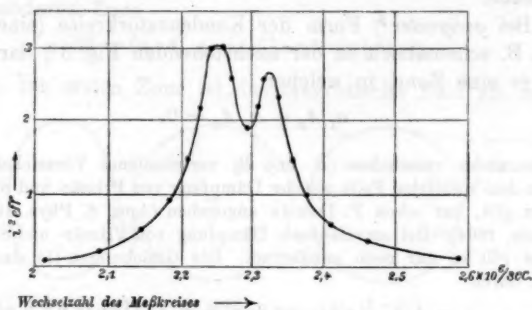


Fig. 2.

Fig. 2 an. Dann lassen sich die Dekremente und Wechselzahlen nicht mehr ohne weiteres auf Grund der Bjerknesschen Methode ermitteln.

Für diesen Fall hat mir Professor Dr. Zenneck vorgeschlagen, die im Folgenden beschriebene Methode auszuarbeiten, welche gestattet, *jede Schwingung getrennt* nach der Bjerknesschen Methode zu untersuchen. Das Prinzip der Methode ist das folgende. Es bezeichnet i_1 bez. i_2 den Strom im ersten bez. zweiten System. Dann gilt annähernd:

$$(1) \quad \begin{cases} i_1 = A_1 e^{-\delta t} \sin(\pi m t) + B_1 e^{-\gamma t} \sin(\pi n t), \\ i_2 = A_2 e^{-\delta t} \sin(\pi m t) + B_2 e^{-\gamma t} \sin(\pi n t). \end{cases}$$

Darin bedeuten δ, γ Konstante, A und B positive oder negative Amplitudenfaktoren. Wesentlich ist, daß die Schwingungen derselben Wechselzahl in beiden Systemen nahezu gleichphasig oder um 180° in der Phase verschoben sind.¹⁾

1) Hat man die Richtungen, in denen man i_1 und i_2 als positiv rechnen will, so bestimmt, daß die Schwingungen mit der Wechselzahl m annähernd gleichphasig sind (A_1 und A_2 gleiches Vorzeichen), so sind die Schwingungen mit der Wechselzahl n annähernd um 180° in der Phase

Die magnetische Induktion \mathfrak{M} in der Umgebung des Systems ist von der Form

$$(2) \mathfrak{M} = (a_1 A_1 + a_2 A_2) e^{-\delta t} \sin(\pi m t) + (a_1 B_1 + a_2 B_2) e^{-\gamma t} \sin(\pi n t),$$

worin die Größen a_1 und a_2 Funktionen des Ortes sind.

Eine einfache Diskussion¹⁾ der Verhältnisse zeigt das Folgende.

Bei *geeigneter*²⁾ Form der Kondensatorkreise (eine solche ist z. B. schematisch in der nachstehenden Fig. 3³⁾ dargestellt) gibt es eine Zone, in welcher

$$(3a) \quad a_1 A_1 + a_2 A_2 = 0,$$

gegeneinander verschoben (B_1 und B_2 verschiedenes Vorzeichen). Daß dies in dem speziellen Falle *gleicher* Dämpfung von Primär- und Sekundär-system gilt, hat schon P. Drude angegeben (Ann. d. Phys. 13. p. 537 Fußnote. 1904). Bei *verschiedener* Dämpfung von Primär- und Sekundär-system gilt es nur noch annähernd. Die Gleichungen (1) sind zu ersetzen durch

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} i_1 = A_1 e^{-\delta t} \sin(\pi m t + \varphi) + B_1 e^{-\gamma t} \sin(\pi n t + \psi), \\ i_2 = A_2 e^{-\delta t} \sin \pi m t + B_2 e^{-\gamma t} \sin \pi n t, \\ \text{worin} \quad \begin{array}{l} \operatorname{tg} \varphi = \frac{\delta_2 - \delta_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{k'} \cdot \frac{N}{m}, \\ \operatorname{tg} \psi = \frac{\delta_2 - \delta_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{k'} \cdot \frac{N}{n} \end{array} \end{array} \right.$$

ist und δ_1, δ_2 die Dekremente von Primär- und Sekundär-system, N die Wechselzahl der beiden Systeme vor der Koppelung, und k' einen die Stärke der Koppelung bestimmenden Faktor (vgl. P. Drude, Ann. d. Phys. 13. p. 512 ff.) bedeutet. Diese Gleichungen (1') sind aus denjenigen von P. Drude ohne Schwierigkeit abzuleiten. Es sind ebenfalls Annäherungsgleichungen, die gelten, solange die Dämpfung der beiden Systeme nicht extrem groß und die Koppelung nicht extrem lose ist.

Die Phasenwinkel φ und ψ werden um so kleiner, je fester die Koppelung (je größer k') und je geringer der Dämpfungsunterschied ($\delta_2 - \delta_1$) der beiden Systeme ist.

1) Wobei besonders das in der vorhergehenden Fußnote Gesagte in Betracht kommt.

2) Bei *beliebiger* Form der Kondensatorkreise existiert stets eine Zone, in welcher *entweder*

$$\text{oder} \quad a_1 A_1 + a_2 A_2 = 0$$

$$a_1 B_1 + a_2 B_2 = 0 \text{ ist.}$$

3) Dabei ist es wesentlich, daß der Strom die beiden Kreise von II in entgegengesetzter Richtung durchfließt.

und eine andere Zone, in welcher

$$(3b) \quad a_1 B_1 + a_2 B_2 = 0$$

ist. In der einen Zone ist das magnetische Wechselfeld von der Form

$$\mathfrak{M} = (a_1 B_1 + a_2 B_2) e^{-\gamma t} \sin(\pi n t),$$

in der anderen Zone

$$\mathfrak{M} = (a_1 A_1 + a_2 A_2) e^{-\delta t} \sin(\pi m t),$$

d. h. in der ersten Zone ist das magnetische Feld ein reines

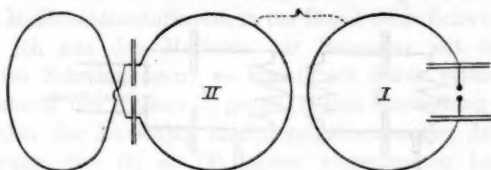


Fig. 3.1)

Wechselfeld von der Wechselzahl n , in der anderen Zone ein ebensolches von der Wechselzahl m .²⁾

Entsprechendes gilt vom magnetischen Induktionsfluß durch irgend einen Stromkreis, z. B. die Strombahn des Meßkondensatorkreises. Befindet sich derselbe in der ersten (bez. der zweiten) Zone, so induziert auf ihn ein reines Wechselfeld von der Wechselzahl n (bez. m) und dem Dämpfungsfaktor γ (bez. δ).

Befindet sich demnach die Strombahn des Meßkondensatorkreises in der einen Zone, und nimmt man die Resonanzkurve

1) Das ; in dieser Figur bedeutet, daß die beiden Kreise übereinander liegen, somit aufeinander induzieren.

2) Wenn eine Phasendifferenz zwischen den beiden Schwingungen derselben Wechselzahl besteht [vgl. p. 183 Fußnote, Gleichung (1')], so gilt für die Amplituden \mathfrak{M}_{10} und \mathfrak{M}_{20} der beiden Wechselfelder

$$(1) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}_{10}^2 = (a_1 A_1)^2 + (a_2 A_2)^2 + 2 a_1 A_1 \cdot a_2 A_2 \cdot \cos \varphi, \\ \mathfrak{M}_{20}^2 = (a_1 B_1)^2 + (a_2 B_2)^2 + 2 a_1 B_1 \cdot a_2 B_2 \cdot \cos \psi. \end{cases}$$

Es verschwindet dann an keiner Stelle eines der beiden Wechselfelder. Allein die notwendige Bedingung für die Verwendbarkeit der Methode ist nicht, daß eines der beiden Felder völlig verschwindet, sondern nur, daß die Wirkung einer Schwingung auf die Resonanzkurve sehr zurücktritt gegen diejenige der anderen.

auf, so bekommt man *nur die Resonanzkurve der einen Schwingung*. Ebenso erhält man in der zweiten Zone die Resonanzkurve der anderen Schwingung allein.

Praktisch gestaltet sich also die Methode wie folgt. Man verschiebt den Meßkondensatorkreis so lange, bis die Resonanzkurve nur *ein* Maximum zeigt. Sie ist dann die Resonanzkurve der einen Schwingung, aus der in bekannter Weise Wechselzahl und Dekrement dieser Schwingung ermittelt wird. Dann verschiebt man den Meßkondensatorkreis weiter, bis wieder in der Resonanzkurve nur *ein*, an einer anderen Stelle gelegenes

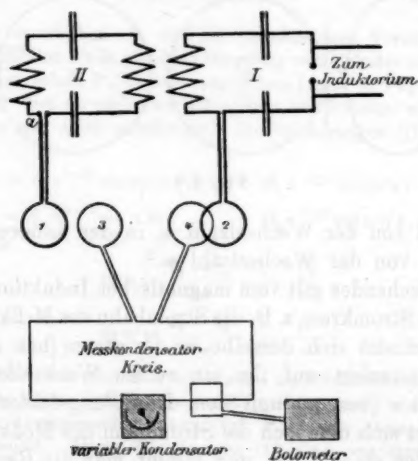


Fig. 4.

Maximum auftritt. Man hat dann die Resonanzkurve und damit Wechselzahl und Dekrement der anderen Schwingung.

Das Absuchen des Feldes bereitet kaum Schwierigkeiten bei geeigneter Form der Kondensatorkreise, wie man sie fast immer herstellen können. Besonders bequem ist eine Anordnung, wie ich sie auf Anraten von Herrn Dr. Papalexi für meine Versuche benutzte, und die eine leichte Abänderung der angegebenen Methode darstellt.

In das Primärsystem I, sowie in das Sekundärsystem II (vgl. Fig. 4) schaltete ich je einen kleinen Kreis (1) und (2) ein,

und zwei ebensolche Spulen (3) und (4) in den Meßkondensator-kreis.¹⁾ Die Zuleitungen zu diesen Kreisen bestanden aus verdrehten Drähten. Da die Ebenen aller anderen Kreise des Aufbaues horizontal lagen, so wurden die Spulen (1) bis (4) durch vertikale Stellung (in der Figur umgelegt) gegen Induktionswirkungen der anderen Teile der beiden Systeme genügend geschützt.

Stellte ich nun die beiden Kreise (1) und (2) im Abstand von etwa 1 m einander gegenüber und koppelte den Kreis (4) mit (2), so erhielt ich bei beliebiger Stellung des Kreises (3) auf dem Meßkondensatorkreise in der Regel beide Schwingungen. Brachte ich nun den Meßkreis zur Resonanz mit der einen der beiden Schwingungen, so konnte ich durch systematische Verschiebung des Kreises (3) gegen (1) eine Einstellung erzielen, bei welcher der Ausschlag im Spiegelgalvanometer, der bei der Annäherung von (3) an (1) immer abgenommen hatte, ein Minimum erreichte; bei noch größerer Annäherung stieg er dann wieder stark. War (3) in dieser Minimumstelle aufgestellt, so zeigte die Resonanzkurve nur noch das Maximum der anderen Schwingung. Welche von beiden Schwingungen man auf diese Weise annullieren, resp. welche Schwingung man isolieren kann, hängt von dem Aufbau des Primärsystemes (I und II) ab, kann aber leicht durch Ausprobieren gefunden werden.

Um nun aber auch die andere Schwingung zu isolieren, braucht man bloß den Kreis (1) bei a umzuschalten. Kreis (3) braucht dabei nur wenig aus seiner früheren Stellung verschoben zu werden.²⁾ Ein Beispiel mag die Brauchbarkeit der Methode zeigen.

1) Über Anordnung von Meßkondensatorkreis, Eichung desselben, Bolometer vgl. J. Zenneck, Elektrom. Schw. p. 606 ff.

2) Dies würde besagen, daß in den Gleichungen (3) die Größen a_1 und a_2 in beiden Fällen annähernd die gleichen Werte haben, woraus folgen würde:

$$\frac{A_1}{A_2} = - \frac{B_1}{B_2}.$$

In der Tat folgt diese Beziehung aus der Theorie sehr annähernd für alle praktisch in Betracht kommenden Fälle (vgl. P. Drude, l. c.).

Zwei Kondensatorkreise mit der Wechselzahl

$$N = 2,315 \cdot 10^6/\text{sec}$$

waren miteinander:

1. ganz lose, 2. mittelmäßig fest, 3. fest gekoppelt.

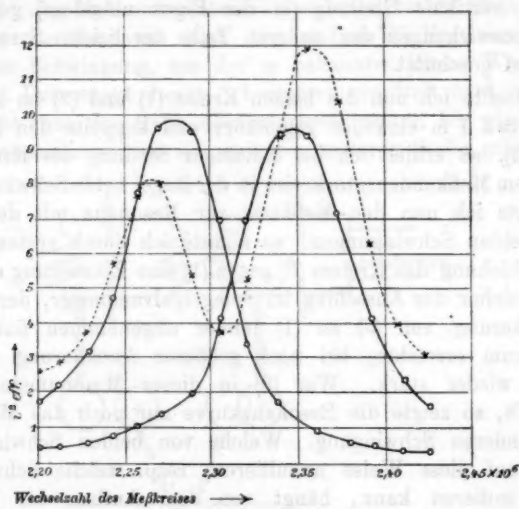


Fig. 5 ($k' = 0,028$).

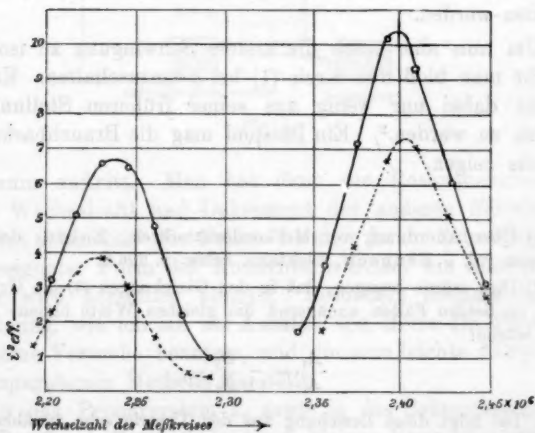


Fig. 6 ($k' = 0,070$).

Die Methode lieferte in den drei Fällen, die in den Figg. 5, 6, 7 ausgezogen bez. durch Kreise markierten Kurven für die beiden isolierten Schwingungen.

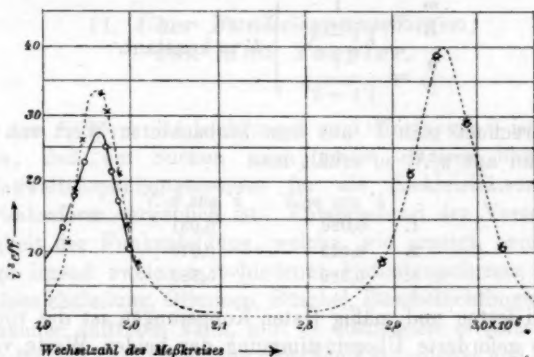


Fig. 7¹⁾ ($k' = 0,889$).

Aus den Kurven²⁾ folgt

	m	n	δ	γ
1.	2,348	2,284	0,08	0,09
2.	2,399	2,236	0,057	0,068
3.	2,960	1,965	0,076	0,09

Die Werte für m und n können benutzt werden, um zu untersuchen, wieweit die Theorie, die für Primärsysteme ohne

1) Die ausgezogene und die punktierte Kurve fallen rechts zufällig zusammen.

2) Ich habe auch die Resonanzkurven mit den zwei Maximis aufgenommen, welche man erhält, wenn man beide Schwingungen gleichzeitig auf den Meßkondensatorkreis einwirken läßt. Dieselben sind in den Figg. 5, 6, 7 gestrichelt bez. durch Kreuze markiert. Wendet man auf die beiden Maxima die Bjerknesschen Beziehungen an, so folgt daraus

	m	n	δ	γ
1.	2,359	2,270	0,07	0,056
2.	2,403	2,229	0,063	0,075
3.	2,960	1,965	0,08	0,09

Bei der losen (übrigens noch nicht einmal sehr losen) Koppelung weichen also die Werte besonders für die Dekremente schon ziemlich stark von den richtigen ab.

Funkenstrecke entwickelt wurde, auch noch für Primärsysteme mit Funkenstrecke gilt.

Nach dieser Theorie¹⁾ soll sein

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{N} &= \frac{1}{\sqrt{1-k'}} \\ \frac{n}{N} &= \frac{1}{\sqrt{1+k'}} \end{aligned} \right\} k' = \text{konstant.}$$

Berechnet man k' aus dem beobachteten Wert von m/N und dann aus n/N , so erhält man

	k' aus m/N	k' aus n/N
1.	0,026	0,031
2.	0,069	0,070
3.	0,389	0,389

Bei festen und mäßig festen Koppelungen ist die von der Theorie geforderte Übereinstimmung der beiden Werte von k' eine sehr gute, sie ist aber mangelhaft bei sehr loser Koppelung. Augenblicklich bin ich an der Arbeit, mit Hilfe der oben beschriebenen Methode gekoppelte Systeme auf Dämpfung und Wechselzahl näher zu untersuchen.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. Dr. Braun und Herrn Prof. Dr. Zenneck, sowie Herrn Dr. Mandelstam für das Interesse, das sie meiner Arbeit entgegenbrachten und für die freundliche Unterstützung, die sie mir dabei zuteil werden ließen, meinen verbindlichsten Dank aussprechen.

Straßburg, Physikalisches Institut.

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 13. p. 534.

(Eingegangen 9. November 1905.)

11. Über Funkenspannungen; von Max Toepler.

Aus früheren Beobachtungen und Messungen¹⁾ ist zu ersehen, daß ein Suchen nach einem *einzigen* bestimmten Schlagweitenspannungsgesetze für die Elektrizitätsentladung in *Funkenform* vergeblich ist. Entsprechend der Verschiedenartigkeit der Funkenbildung, welche, wie gezeigt, beim Übergange irgend zweier verschiedener Entladungsformen — wie lichtlose Entladung, Glimmen, Büschel, Büschellichtbogen etc. — ineinander auftreten kann, gibt es *ebensoviele verschiedene* Gesetze für den Zusammenhang zwischen Funkenlänge und Funkenspannung. Jedes derartige Gesetz hat dann nur einen mit der Existenzfähigkeit der einzelnen Entladungsformen eng zusammenhängenden *beschränkten Gültigkeitsbereich*, und die Frage nach der Funkenspannung löst sich in die Beantwortung der Frage nach den Existenz- und Grenzbedingungen einzelner Entladungsformen auf; Funkenspannungen sind Anfangs- oder Grenzspannungen.²⁾

Die früheren Untersuchungen über Funkenspannungen behandelten eingehend den einfachen Spezialfall, daß einer Kugelelektrode eine ausgedehnte ebene Platte gegenübersteht; der Fall *symmetrischer* Versuchsanordnung wurde nur gestreift. Nachstehend soll nun versucht werden, die komplizierteren Verhältnisse bei symmetrischer Versuchsanordnung klarzulegen.

I. Funkenspannung, Anfangsspannung, Grenzspannung.

Es erscheint zweckmäßig, zunächst einiges aus früherem kurz zusammenzustellen.

Es sei mit d der Durchmesser der Kugelelektrode, mit f

1) M. Toepler, Ann. d. Phys. 2. p. 560. 1900; ferner 7. p. 477. 1902 und 10. p. 730. 1903.

2) Mit „Anfangsspannung“ ist früher und hier speziell die Grenzspannung lichtloser Entladung, also die Spannung, bei welcher leuchtende Entladung irgendwelcher Art einsetzt, bezeichnet.

der Abstand der nächsten Elektrodenpunkte (Schlagweite) bezeichnet.

Für den Fall der Entladung zwischen Kugel und Platte war gefunden:

Solange $f:d$ klein ist, ist Funkenspannung gleich Anfangsspannung, d. h. sobald leuchtende Entladung entsteht, bildet sich auch sogleich ein Funken von Elektrode zu Elektrode. Diese Anfangsspannung ist nur wenig verschieden, ob die Kugelelektrode Anode oder Kathode ist. Als Interpolationsformel wurde gefunden (d und f in Zentimetern):

$$(1) \quad A_1 = 300 d \left(96 + \frac{64}{\sqrt{d}} \right) \frac{f + 0,5 d}{f + 2,9 d} \text{ Volt};$$

(diese Formel versagt jedoch für $f:d < 0,5$).

Für große Werte $f:d$ bildet sich bei Ausbruch von Büschelentladung nicht mehr sogleich ein Funken; hierzu muß die Spannung weiter erhöht werden bis zur sogenannten Grenzspannung der Büschelentladung. Letztere ist für positive oder negative Büschel- bez. Streifenentladung sehr verschieden und dementsprechend auch die Funkenspannung!

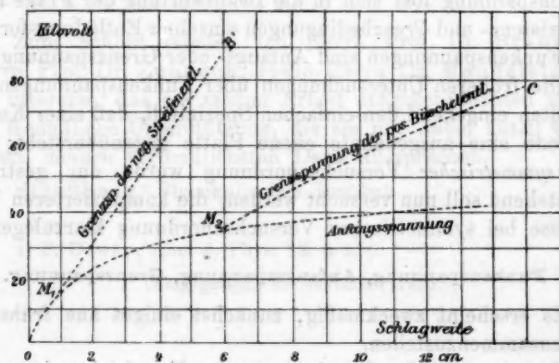


Fig. 1.

In Fig. 1 ist nach früheren Messungen für irgendeine bestimmte Elektrodengröße (z. B. Kugel von 1 cm Durchmesser gegenüber großer Platte) der Verlauf von Anfangsspannung und von positiver und negativer Grenzspannung eingetragen. Ist die

Kugel Anode, so verläuft die *Funkenspannung* von O über $M_1 M_2$ nach C , ist sie Kathode, so gibt der Kurvenzug $O M_1 B'$ den Verlauf der *Funkenspannung*.

Um den Einfluß der Elektrodengröße zu zeigen, sind (immer wieder für den Fall Kugel-Platte) in Fig. 2 für einen

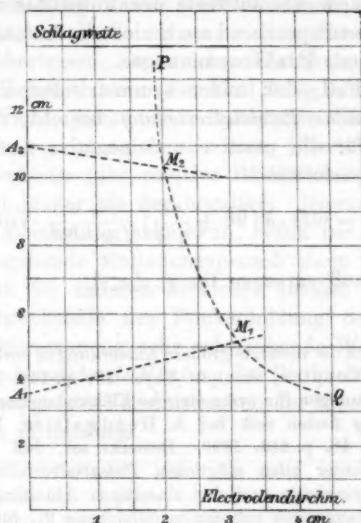


Fig. 2.

bestimmten Spannungswert, z. B. 80000 Volt, in die Koordinatenebene: Elektrodendurchmesser-Schlagweite die Kurven mit gleicher

Anfangsspannung = 80000 Volt $P Q$,

Grenzspannung positiver Büschelentladung = 80000 Volt $A_2 M_2$,

Grenzspannung von negativer Büschel- (genauer Streifen-) Entladung
= 80000 Volt $A_1 M_1$

ingezeichnet.

Die gleiche *Funkenspannung* von 80000 Volt besitzen alle Kombinationen f und d des Kurvenzuges $A_2 M_2 M_1 Q$, falls die Kugel Anode ist, des Kurvenzuges $A_1 M_1 Q$, falls die Kugelelektrode Kathode ist.

Weitere Grenzspannungen, z. B. diejenige der Glimmentladung, kommen erfahrungsgemäß in der Regel nur bei

ganz stetiger Stromzufuhr zu den Elektroden für eine Funkenbildung in Betracht.¹⁾

Für den in vorliegender Arbeit behandelten Fall streng symmetrischer *Versuchsanordnung* ist der Kraftlinienverlauf *nicht* mehr wie im vorangehenden Falle (Kugel—große Platte) unabhängig von dem Absolutwerte der Potentiale auf den Elektroden, und dementsprechend auch nicht die Anfangsspannungen, Grenzspannungen, Funkenspannungen.

Für den Fall, daß außer symmetrischer Versuchs- auch *streng symmetrische Potentialverteilung* besteht, läßt sich aus Gleichung (1) für die positive und negative Anfangsspannung die Interpolationsformel

$$(2) \quad A_2 = 600 \cdot d \left(96 + \frac{64}{\sqrt{d}} \right) \frac{f+d}{f+5,8d} \text{ Volt}$$

folgern²⁾; sie muß versagen für $f:d < 1$.

1) Vgl. jedoch die vorletzte größere Anmerkung in vorliegender Arbeit.

2) Vgl. M. Toepler, Ann. d. Phys. 10. p. 746. 1903. Angaben über Anfangsspannungen für symmetrische Elektrodenanordnung aber bei einseitiger *Erdung* finden sich bei A. Heydweiller, Wied. Ann. 40. p. 464. 1890 und 48. p. 213. 1893. Bemerkt sei, daß bei bestimmter Elektrodengröße unter allen möglichen *Potentialverteilungen* zwischen dem Falle der Symmetrie und der einseitigen Ableitung ersterem die *größten* Anfangsspannungen zukommen (Gleichung 2), für den Fall einseitiger Ableitung die kleinsten. Nachstehend seien, um die Größe des Unterschiedes zu zeigen, für $d = 1$ cm Werte von Anfangsspannungen zusammengestellt.

f in cm	2,5	5,0	7,5	10,0	12,5	15	—	∞
A_1 (Kugel—Platte) in Kilovolt	26,5	33,4	36,9	39,1	40,5	41,6	—	48,0
A_2 (symmetr. Versuchs- und symmetr. Potentialanordnung)	40,5	52,0	61,4	66,8	70,8	73,8	—	96,0
A_3 (symmetr. Versuchsanordnung u. eine Elektr. geerdet)	38,4	43,0	44,6	45,5	46,0	46,3	—	48,0

Bei Arbeiten mit symmetrischer Potentialverteilung wird also jede durch ungleiche Isolations- oder Strahlungsverluste bedingte zufällige Asymmetrie der Potentialverteilung die Anfangsspannung herabsetzen, die Werte A_2 werden besonders bei Arbeiten mit der Influenzmaschine nur als größte Grenzwerte auftreten.

Aber auch bei Beschränkung auf den Fall symmetrischer Potentialverteilung müssen sich die Verhältnisse der Funkenbildung wesentlich komplizieren, sobald $f:d$ so groß wird, daß die Funken sich nicht mehr sogleich bei Entladungsausbruch bilden. Denn während bei Gegenüberstellung von Kugel und Platte die Entladung immer von derselben Elektrode, der Kugel, ausgeht, ist es bei symmetrischer Versuchsanordnung dem Zufalle überlassen, an welcher Elektrode die Entladung beginnt; je nachdem aber die Entladung von Anode oder Kathode ausbricht, kommt der leuchtende Entladungsprozeß verschieden weit, ist also die zur Überbrückung nötige Spannung *verschieden* (der positive Büschel ist ja bei gleicher Spannung weit länger als der negative). Hierzu kommt noch, daß es nicht gleichgültig sein kann, wann der von der einen Elektrode ausgehende Entladungsprozeß einen ihm entgegenkommenden an der anderen Elektrode auslöst. Überläßt man also die Ausbruchstelle der Funkenbildung dem Zufalle, so muß die Funkenspannung sehr schwankende Werte annehmen, und nur durch *hinreichende Häufung* des Beobachtungsmateriales erhält man trotz *großer* Verschiedenheit der Einzelwerte einigermaßen sichere Mittelwerte.

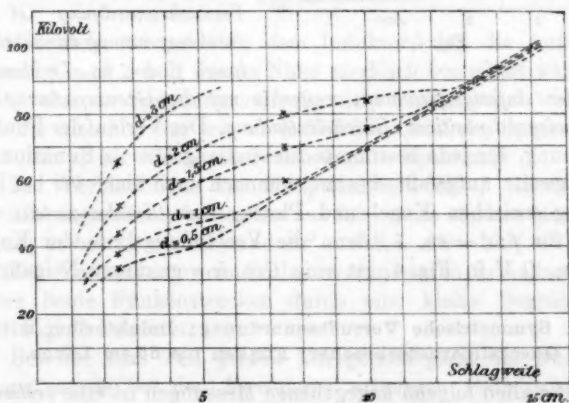


Fig. 3.

Zum leichteren Verständnisse der Beobachtungen im nächsten Abschnitte seien hier noch in Fig. 3 und 4 die Er-

gebnisse einiger orientierender Messungen für kleine Schlagweiten (bis 15 cm) dargestellt, ausgeführt mit einer 60 plattigen Influenzmaschine bei streng symmetrischer Elektrodenanordnung

und möglichst symmetrischer Potentialverteilung.¹⁾

In Fig 3 ist zu Schlagweiten als Abszissen der Verlauf der *Funkenspannung* eingetragen.

In Fig. 4 sind in der Koordinatenebene: Elektrodendurchmesser und Elektrodenabstand (Schlagweite) einige *Kurven gleicher Funkenspannung* (und zwar für 40, 60 und 80 Kilovolt) gezeichnet.

Aus den Beobachtungen und Messungen ist zu folgern:

Auch bei symmetrischer Versuchsanordnung ist die *Funkenspannung* zunächst (solange $f:d < \text{ca. } 7$) identisch

mit der Anfangsspannung, weiterhin mit der Grenzspannung von (überwiegend positiver) Büschelentladung. Der Verlauf der Funkenspannung, für jede bestimmte Elektrodengröße als Funktion der Schlagweite aufgefaßt, besitzt demnach auch hier, wie bei Entladung zwischen Kugel und Platte, eine *Knickungsstelle* und zwar für $f:d = \text{ca. } 7$, denn die Verbindungslinie der Knickstellen, *OM* in Fig. 4, ist eine *Gerade* von dieser Neigung.

II. Symmetrische Versuchsanordnung; Induktorium mit Quecksilberunterbrecher; Funken bis 55 cm Länge.

Bei allen folgend angegebenen Messungen ist eine *bestimmte* Erregungsart des Induktors unverändert beibehalten worden;

1) Die Spannungsmessungen erfolgten ganz wie früher (Bestimmung der Nebenschlagweiten zwischen Messingkugeln von je 6 cm Durchmesser).

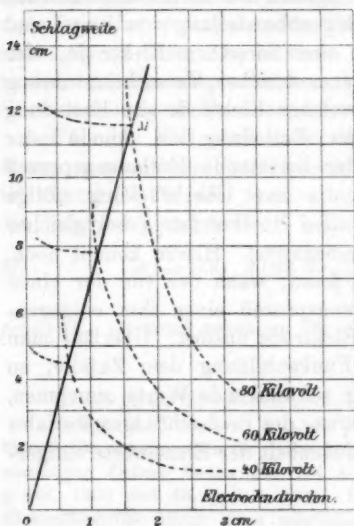


Fig. 4.

es sind so alle Messungsergebnisse miteinander direkt vergleichbar.

Ein Induktor von Klingelfuss (für 70 cm maximale Schlagweite zwischen spitzer Anode und Platte) wurde mit 20 Volt (20—25 Amp. Maximalstromstärke) betrieben.

Als Unterbrecher diente ein langsam schwingender (12 Unterbrechungen in 10 Sek.) Quecksilberunterbrecher (nach Despretz), welcher automatisch elektromagnetisch im Gange gehalten wurde.

Die Funkenstrecke F (vgl. Fig. 5) mit großen Polkugeln (der Durchmesser D derselben betrug teils je 10, teils je 15 cm)

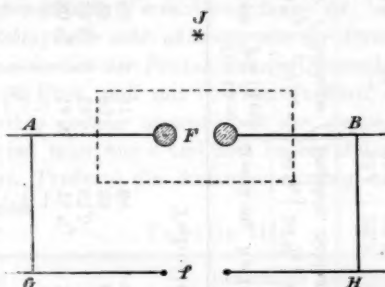


Fig. 5.

stand so dicht (30 cm) über dem Induktor, daß die Anfangsspannung in F durch dessen Nähe merklich beeinflußt war, sie konnte also zur Spannungsmessung nicht herangezogen werden; F diente also hier nur wie ein *willkürlich* variables Spannungsventil (für je bestimmte aber unbekannte Spannung).

Die Verbindungen zur Hauptfunkenstrecke f (alles symmetrisch angeordnet) bestanden aus 0,3—1 cm starken Messingrohren; es betrug der Abstand $AF = FB = AG = BH = 75$ cm.

Zur Vermeidung von Entladeverzögerung waren bei allen Versuchen beide Funkenstrecken durch eine kleine Bogenlampe (J in Fig. 5) belichtet.

Bei der zum Teil *großen* Unregelmäßigkeit der Funkenbildung wurde bei den Messungen sozusagen statistisch und zwar folgendermaßen verfahren: Bei fest eingestelltem F (Elektroden Durchmesser D) und bestimmt gewählten Elektroden bei f (Durchmesser d) wurde über den Untersuchungsbereich hin die Länge f schrittweise um 2 zu 2 cm vergrößert, und für jedes f

Tabelle I.
 $D = 15 \text{ cm}, F = 20 \text{ cm}.$

Schlagw. f in cm	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56
Spitzen	—	—	—	—	—	98%	90%	38%	17%	5%
$d = 0,5 \text{ cm}$	—	—	—	—	—	81	59	37	13	—
$d = 1,0$	—	—	—	—	—	75	55	37,5	13	—
$d = 2,0$	—	—	—	—	—	73	58,5	35	18	—
$d = 3,0$	96%	80%	74%	71%	71%	58	59	41	15	—
$d = 4,0$	90	86,5	78,5	67,5	76	55	45	37	11,5	—
$d = 5,0$	94	75	80	39	68	46	45	22	8	—
$d = 6,0$	84	65	47	66	48	38	11	—	—	4%

Tabelle II.

Spitzen	$D = 10 \text{ cm}, F = 5 \text{ cm}$			$D = 10 \text{ cm}$			$D = 15 \text{ cm}$			$D = 15 \text{ cm}, F = 10 \text{ cm}$			$D = 15 \text{ cm}$			$D = 15 \text{ cm}, F = 20 \text{ cm}$		
	30%	50%	70%	50%	30%	50%	30%	50%	70%	50%	30%	50%	30%	50%	70%	30%	50%	70%
Zugehör. Schlagw. f				Schlagw. f			Zugehör. Schlagw. f			Schlagw. f			Zugehör. Schlagw. f			Zugehör. Schlagw. f		
$d = 0,5 \text{ cm}$	—	—	—	—	83,1	32,6	82,1	—	—	43,5	43,0	42,4	52,6	50,9	50,7	52,5	50,9	49,0
$d = 1,0$	16,5	14,6	10,8	26,1	81,9	30,3	26,1	31,7	—	—	—	—	52,5	50,6	48,5	52,5	50,6	48,5
$d = 2,0$	16,2	14,6	12,9	24,7	31,0	29,3	24,5	30,5	—	—	—	—	52,5	50,7	48,5	52,5	50,7	48,5
$d = 3,0$	15,3	14,3	12,8	23,9	27,3	24,3	22,2	26,0	—	—	—	—	52,5	50,7	48,5	52,5	50,7	48,5
$d = 4,0$	13,2	11,2	10,5	23,4	27,8	23,6	20,3	24,0	—	—	—	—	52,5	51,0	46,1	52,5	49,0	48,5
$d = 5,0$	8,7	8,3	7,9	23,0	27,4	25,7	24,6	26,5	—	—	—	—	52,5	47,7	42,5	51,3	47,7	42,5
$d = 6,0$	—	—	—	17,0	27,6	26,5	26,5	26,5	—	—	—	—	48,6	45,8	39,4	48,6	45,8	39,4
$d = 10,0$	5,6	5,1	4,8	13,4	12,2	12,0	11,3	19,9	—	—	—	—	35,5	34,6	33,5	35,5	34,6	33,5
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	21,6	21,3	21,0	38,9	38,4	38,5	38,9	38,4	38,5

abgezählt, wie oft (unter je 200 Entladungen) Funkenbildung speziell im Schlagraum f eintrat, und so die prozentuelle Zahl der Treffer auf f als Funktion von f festgestellt. Nebenstehend ein Beispiel in Tab. I.

Aus derartigen Beobachtungen wurde dann durch graphische Interpolation ermittelt, für welche Schlagweite f 30 bez. 50 bez. 70 Proz. aller Funken in f zu erwarten waren.

In Tab. II sind die so erhaltenen Schlagweiten f zusammengestellt.

Aus diesen Beobachtungen folgt:

Für symmetrische Versuchsanordnung ist, solange $f:d < 6$ bleibt, die Schlagweite sehr abhängig von der Elektrodengröße und dabei die Unsicherheit der Funkenbildung (Unterschied der Schlagweiten mit 30 Proz. und mit 70 Proz. Treffern) nur gering; die Funkenspannung ist hier identisch mit der Anfangsspannung.

Berechnet man aus d und dem beobachteten zugehörigen f (mit 50 Proz. Treffern) die Anfangsspannung nach Formel (2), so erhält man

Tabelle III.

d in cm	f in cm	Berechnete Anfangsspannung in Kilovolt	
6	5,1	119,6	} Mittel 119,8
4	8,3	121,1	
3	11,2	118,7	
6	13,4	174,8	} Mittel 176,7
5	17,0	178,3	
4	23,0	177,1	
10	12,0	219,1	} Mittel 214,2
6	20,8	211,6	
5	26,5	212,0	
10	21,3	275,2	} Mittel 266,2
6	34,6	257,2	

Soweit mehrere Wertepaare f und d zur Berechnung der Anfangsspannung beobachtet sind, stimmen die berechneten Spannungen auffallend gut überein.¹⁾ Es ist hieraus zu schließen:

1) Die Werte $f = 21,3$ und noch mehr $f = 35,4$ für $d = 10$ cm in Tab. II sind auffallend hoch; vielleicht könnte eine etwas größere

Die Werte der Anfangsspannung bei der benutzten Anregungsart (Quecksilberunterbrecher; ein Funken in der Sekunde) sind durch Gleichung (2) (entweder völlig oder wenigstens bis auf einen bestimmten, unbekannten, für alle Werte von f und d im Beobachtungsbereiche gleichen Faktor) darstellbar.

In Fig. 6 sind für $d = 4, 6$ und 10 cm zu Schlagweiten als Abszissen die zugehörigen berechneten Funkenspannungen

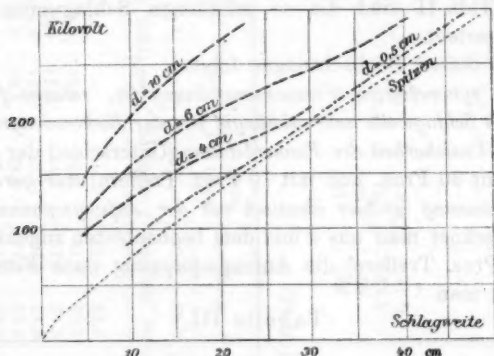


Fig. 6.

(für 50 Proz. Treffer) eingetragen, und die für dieselbe Elektrodengröße geltenden Werte durch *gestrichelte* Kurvenzüge verbunden.

Korrosion der Oberfläche dieser Kugeln hieran schuld sein. Möglich wäre auch, daß diese unerwartet großen Schlagweiten die gleiche Ursache haben, wie die eingangs erwähnten ähnlichen Abweichungen bei Anwendung von Influenzmaschinen, nämlich Spannungsasymmetrien, welche bei Annäherung an die Leistungsgrenze des Induktors wohl immer auftreten. Daß wir es in der Nähe dieser Grenze (sie beträgt für den benutzten Induktor, nach den Ausführungen des letzten Abschnittes zu schließen, etwa 350 Kilovolt) sicher mit *großen* Unregelmäßigkeiten zu tun haben, dafür scheint mir die Tatsache ein sicherer Beweis zu sein, daß die von Hrn. Klingelfuss an der Grenze der Leistungsfähigkeit seiner Induktorien *errechneten* Spannungswerte in mehrfacher Hinsicht eine völlig unwahrscheinliche Höhe erreichen, während seine berechneten Spannungswerte im übrigen nicht abnormale sind, wie die Zusammenstellung am Schlusse dieser Arbeit (Anhang) zeigt. Die wahrscheinlichste Erklärung jedoch für diese hohen Werte von Tab. II ist in der vorletzten größeren Anmerkung des Anhanges dieser Arbeit angegeben.

Für Werte von $f:d$ zwischen 6 und ca. 25 ist bei symmetrischer Versuchsanordnung die Unsicherheit der Funkenbildung eine auffallend große (vgl. z. B. Tab. I); der Grund hierzu ist im nächsten Abschnitte erörtert.

Für spitze oder kleine Elektroden, d. h. für $f:d > 25$ ist die Unsicherheit der Funkenbildung wieder klein, die Schlagweite ist jetzt wenig abhängig von der Elektrodengröße (vgl. z. B. Tab. I); Funkenspannung ist identisch mit Grenzspannung überwiegend positiver Büschelentladung.

In Fig. 6 sind die für $d = 0,5$ cm beobachteten Funkenlängen (d. h. also der Verlauf der soeben genannten Grenzspannung) als stark strichpunktierte Kurve gezeichnet. Die Bedeutung der schwach punktierten Kurve (Spitzen) findet sich im Anhang am Schlusse der Arbeit.

III. Beobachtungen mit festgelegter Ausbruchsstelle der Entladung.

Zum Nachweise, daß die im vorigen Abschnitte gefundene große Unsicherheit der Funkenspannung im Bereiche $25 > f:d > 6$ im wesentlichen dem Umstande zuzuschreiben ist, daß der Ausbruch der Entladung — ob an Anode oder an Kathode — dem Zufalle überlassen blieb, wurden die nachfolgend kurz angegebenen Messungen ausgeführt.

Bringt man an der Oberfläche einer großen Kugelelektrode eine kurze (relativ zum Elektrodendurchmesser) Spitze an, so wird hierdurch wesentlich nur die Potentialverteilung in der Nähe der Spitze geändert, in größerer Entfernung von der Oberfläche bleibt das Feld *ungeändert*. Hieraus ist zu folgern, daß durch Anbringung der Spitze die *Anfangsspannung* herabgesetzt wird (der *Ausbruch* der Entladung kann an der Spitze schon bei kleiner Spannung stattfinden), daß dagegen die *Grenzspannung* der Büschelentladung wenig geändert werden wird (denn das Büschel wächst in ein durch das Vorhandensein der Spitze wenig geändertes Feld).

Für den speziellen Fall, daß bei sonst *symmetrischer Versuchsanordnung* (wie im vorigen Abschnitte) für jeden Elektrodenabstand einmal an der Anodenkugel, dann an der Kathodenkugel eine kurze Spitze (1 cm langer geschärfter Nagel) in Richtung der Kugelzentralen angebracht war, wurden Messungen ganz

wie zu Tab. I und II ausgeführt. Es genügt die für eine bestimmte Ventilsfunkenstrecke ($F = 15$ cm, $D = 15$ cm) gefundenen Werte anzugeben (die Länge f ist auch hier zwischen den nächsten Punkten der Kugeloberflächen gemessen).

Tabelle IV.

		Schlagweite in Zentimetern mit		
		30 Proz.	50 Proz.	70 Proz.
		aller Funken		
Zwei spitze Elektroden		43,7	42,9	42,0
$d = 3$ cm	Spitze an Anode	45,2	43,5	42,4
	„ „ Kathode	36,7	33,2	29,5
$d = 5$ cm	Spitze an Anode	44,3	42,6	40,5
	„ „ Kathode	31,6	30,7	29,6
$d = 6$ cm	Spitze an Anode	44,6	43,7	42,9
	„ „ Kathode	35,6	34,5	32,6
$d = 10$ cm	Spitze an Anode	43,0	41,4	37,0
	„ „ Kathode	21,1	20,2	19,2

Ähnliches ergaben weitere Messungen in anderen Spannungslagen (mit anderem F).

Es läßt sich folgendes feststellen: *Sitzt die Spitze an der Anode, so ist die Unsicherheit der Funkenlänge eine nur geringe, und die Funkenspannung (Grenzspannung überwiegend positiver Büschelentladung) ist unabhängig von der Elektrodengröße (geprüft bis zu Werten $f:d = 3$ hinab).*

Sitzt die Spitze an der Kathode, so ist die Unsicherheit der Funkenbildung oft beträchtlich (Tab. IV läßt dies zufällig nicht besonders hervortreten); die Funkenspannung ist jetzt wesentlich abhängig von der Elektrodengröße und nimmt mit letzterer beträchtlich zu.

Unter Berücksichtigung dieser Ergebnisse erscheinen die Beobachtungen von Abschnitt II über Bildung langer Funken wesentlich geklärt. Es läßt sich nunmehr folgendes bezüglich des Zusammenhanges von Funkenlänge und Elektrodendurchmesser bei vollständig symmetrischer Versuchsanordnung und für irgendeine bestimmte hohe Spannung aussagen (vgl. Fig. 7).

Würde zufällig bei *allen* Funken einer Beobachtungsreihe der Bildungsprozeß der leuchtenden Entladung von der *Anode* ausgehen, wobei dann jeweils das positive Büschel den überwiegenden Teil des Schlagraumes füllt, so würde man, da die Grenzspannung dieser Büschelentladung (in Fig. 7 Kurvenstück ΔB) fast unabhängig von der Elektrodengröße ist, auch die Funkenspannung gleich unabhängig finden, soweit sie mit dieser Grenzspannung identisch ist (von A bis L).

Gingen *alle* Entladungen von der *Kathode* aus, so läge die Grenz- und Funkenspannung wesentlich höher. Würde hierbei der Schlagraum überhaupt nur vom negativen Büschel *erfüllt*, so wären (nach dem Verhalten rein negativer Büschelentladung zwischen Kugelkathode und Platte geschlossen) etwa

die Funkenlängen entsprechend Kurve $A'C'$ zu erwarten; je kleiner jedoch die Elektroden sind, um so leichter und eher kommt dem vorschießenden negativen Büschel ein positives von der Anode aus entgegen. Für die tatsächlich jeweils meist eintretende Verteilung von positivem und negativem Büschel im Schlagraume ergäbe sich (auch wenn wie angenommen die Entladung stets an der Kathode *ausbricht*) im Mittel AC als Kurve gleicher Grenzspannung, jedoch hängt dieselbe und mit ihr die Funkenspannung stark von Zufälligkeiten ab.

Indem bei völlig symmetrischer Versuchsanordnung einmal die Entladung an Anode, dann an Kathode einsetzt, wie es der Zufall mit sich bringt, so liegt der *Mittelwert* der Grenzbez. Funkenspannung für eine Reihe von Entladungen zwischen

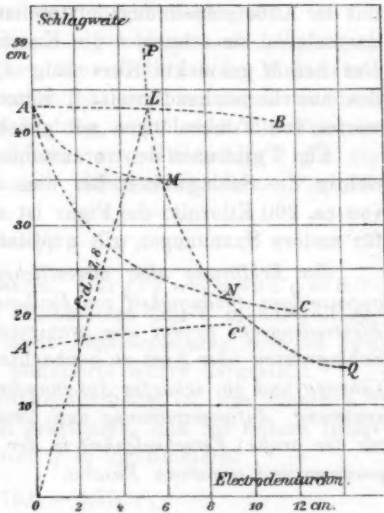


Fig. 7.

den für Ausbruch an Anode und den an Kathode geltenden Werten. Die Kurve gleicher Mittelwerte für Grenz- oder Funkenspannung verläuft also zwischen AB und AC und nähert sich bei hinreichender Häufung der beobachteten Funkenzahl mehr und mehr einer mittleren Kurve AM .

Für kleine Werte $f:d$ ist die Funkenspannung identisch mit der Anfangsspannung; letztere ist durch die Kurve $PLMNQ$ dargestellt, sie schneidet die Kurven gleicher Grenzspannung. Der bei M geknickte Kurvenzug AMQ gibt also den Verlauf des aus hinreichend vielen¹⁾ Einzelwerten gezogenen Mittelwertes von Funkenlängen mit gleicher Funkenspannung.

Fig. 7 gibt nach den voranstehenden Messungen quantitativ richtig die Schlagweiten bei dem speziellen Spannungswerte von ca. 260 Kilovolt; die Figur ist als typisch anzusehen, d. h. für andere Spannungen gilt qualitativ das gleiche Bild.

Zur Erklärung aller wesentlichen Eigentümlichkeiten in der gegenseitigen Abhängigkeit von Funkenspannung, Funkenlänge und Elektrodenlänge genügt also (wenigstens für die in der Regel bei Schlagweiten über 5 cm zu beobachtenden Verhältnisse) die Einführung und ein scharfes Auseinanderhalten der Begriffe Funkenspannung, Anfangsspannung und Grenzspannung und die Kenntnis der großen Verschiedenheit in der Wachstumsfähigkeit für den positiven und negativen Büschel.

Anhang.

Gesetz der Funkenspannung an Spitzen.

Bei den verschiedensten Spannungen bis ca. 90 Kilovolt (Schlagweiten bis ca. 15 cm) war früher und oben (vgl. Fig. 4) die einfache Beziehung gefunden, daß für den Schnittpunkt M das Verhältnis der Funkenlänge f zum Elektroden Durchmesser d fast

¹⁾ Aus den Messungen geht hervor, daß bis zu $f = \text{ca. } 20 \text{ cm}$ die Mittel aus je 200 Funkenlängen sich nicht mehr allzusehr vom Mittel AM für sehr viel Funken entfernen, daß jedoch für $f > 30 \text{ cm}$ selbst 400 Funken dort noch nicht zur Bildung eines bis auf 10 Proz. sicheren Mittels genügen, wo die Kurven AL und AN weit auseinandergehen. Es folgt also: Zu Messzwecken eventuell brauchbare, d. h. mit verhältnismäßig geringer Unsicherheit verbundene Funkenbildung findet nur für $f:d > 25$ statt, — und dann wieder für $f:d < 6$ (Funkensp. = Anfangsp.).

konstant ist und zwar nahe 7 beträgt. Aus den weiterreichenden Messungen mit dem Induktor, durch welche die Punkte L und M als besonders zu unterscheidende hervortreten (vgl. Fig. 7), ist zu entnehmen, daß nur für den Punkt L angenäherte Konstanz von $f:d$ gilt (und zwar ist $f:d$ für L nahe gleich 7,8), daß dagegen für den Punkt M das Verhältnis $f:d$ nicht konstant bleibt, sondern mit wachsendem f merklich abnimmt.

Liegt aber L für alle Spannungen genau auf der gleichen Geraden (ist $f:d = \text{konstant}$), so läßt sich die von der Elektrodengröße als unabhängig anzusehende Grenzspannung C von überwiegend positiver Büschelentladung, und somit die Funkenspannung zwischen zwei Spitzen aus Gleichung (2) für die Anfangsspannungen berechnen. Man erhält (ohne Vernachlässigungen)

$$(3) \quad C = a\sqrt{f} + b \cdot f,$$

wo a und b Konstanten bedeuten. Für $f:d = 7,8$ wird $a = 8,90$ und $b = 4,779$, wenn f in Zentimetern und C in Kilovolt gezählt sind. In Fig. 6 ist diese Funkenspannung zwischen zwei Spitzen durch die schwach punktierte Kurve dargestellt.

Diese Kurve für die Funkenspannung ist, wie auch Fig. 6 erkennen läßt, so schwach gekrümmt, daß die lineare Interpolationsformel (V in Kilovolt, f in Zentimetern)

$$V = 18,0 + 5,75 \cdot f,$$

für $f = 10$ cm, bis $f = 50$ cm, nur zu Abweichungen bis zu 1,5 Proz. führt; solche liegen aber noch innerhalb der Versuchsunsicherheiten.

Dieses Ergebnis stimmt mit den Beobachtungen anderer über die Funkenspannung völlig überein; von Hrn. B. Walter¹⁾ ist schon öfters auf die sehr angenäherte Gültigkeit einer linearen Interpolationsformel $a + bf$ im oben angeführten Bereiche hingewiesen.²⁾

1) B. Walter, Elektrotechn. Zeitschr. p. 874. 1904.

2) Mehrere Umstände können leicht für ein größeres Schlagweitenintervall den Verlauf der Funkenspannung als streng geradlinig erscheinen lassen, wie dies der Formeltypus von Hrn. Walter ausdrückt:

Bei kleinen Schlagweiten übersteigen die Funkenspannungen die Grenzspannung der Büschelentladung aus zwei Gründen: einmal werden

Die Werte der Anfangsspannung bei der benutzten Anregungsart (Quecksilberunterbrecher; ein Funken in der Sekunde) sind durch Gleichung (2) (entweder völlig oder wenigstens bis auf einen bestimmten, unbekannten, für alle Werte von f und d im Beobachtungsbereiche gleichen Faktor) darstellbar.

In Fig. 6 sind für $d = 4, 6$ und 10 cm zu Schlagweiten als Abszissen die zugehörigen berechneten Funkenspannungen

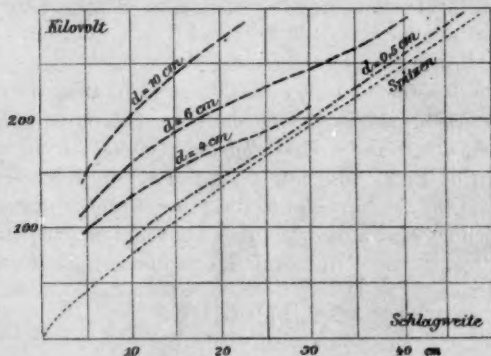


Fig. 6.

(für 50 Proz. Treffer) eingetragen, und die für dieselbe Elektrodengröße geltenden Werte durch *gestrichelte* Kurvenzüge verbunden.

Korrosion der Oberfläche dieser Kugeln hieran schuld sein. Möglich wäre auch, daß diese unerwartet großen Schlagweiten die gleiche Ursache haben, wie die eingangs erwähnten ähnlichen Abweichungen bei Anwendung von Influenzmaschinen, nämlich Spannungsasymmetrien, welche bei Annäherung an die Leistungsgrenze des Induktors wohl immer auftreten. Daß wir es in der Nähe dieser Grenze (sie beträgt für den benutzten Induktor, nach den Ausführungen des letzten Abschnittes zu schließen, etwa 350 Kilovolt) sicher mit *großen* Unregelmäßigkeiten zu tun haben, dafür scheint mir die Tatsache ein sicherer Beweis zu sein, daß die von Hrn. Klingelfuss an der Grenze der Leistungsfähigkeit seiner Induktorien *errechneten* Spannungswerte in mehrfacher Hinsicht eine völlig unwahrscheinliche Höhe erreichen, während seine berechneten Spannungswerte im übrigen nicht abnormale sind, wie die Zusammenstellung am Schlusse dieser Arbeit (Anhang) zeigt. Die wahrscheinlichste Erklärung jedoch für diese hohen Werte von Tab. II ist in der vorletzten größeren Anmerkung des Anhangs dieser Arbeit angegeben.

Für Werte von $f:d$ zwischen 6 und ca. 25 ist bei symmetrischer Versuchsanordnung die Unsicherheit der Funkenbildung eine auffallend große (vgl. z. B. Tab. I); der Grund hierzu ist im nächsten Abschnitte erörtert.

Für spitze oder kleine Elektroden, d. h. für $f:d > 25$ ist die Unsicherheit der Funkenbildung wieder klein, die Schlagweite ist jetzt wenig abhängig von der Elektrodengröße (vgl. z. B. Tab. I); Funkenspannung ist identisch mit Grenzspannung überwiegend positiver Büschelentladung.

In Fig. 6 sind die für $d = 0,5$ cm beobachteten Funkenlängen (d. h. also der Verlauf der soeben genannten Grenzspannung) als stark strichpunktierte Kurve gezeichnet. Die Bedeutung der schwach punktierten Kurve (Spitzen) findet sich im Anhang am Schlusse der Arbeit.

III. Beobachtungen mit festgelegter Ausbruchstelle der Entladung.

Zum Nachweise, daß die im vorigen Abschnitte gefundene große Unsicherheit der Funkenspannung im Bereiche $25 > f:d > 6$ im wesentlichen dem Umstande zuzuschreiben ist, daß der Ausbruch der Entladung — ob an Anode oder an Kathode — dem Zufalle überlassen blieb, wurden die nachfolgend kurz angegebenen Messungen ausgeführt.

Bringt man an der Oberfläche einer großen Kugelelektrode eine kurze (relativ zum Elektrodendurchmesser) Spitze an, so wird hierdurch wesentlich nur die Potentialverteilung in der Nähe der Spitze geändert, in größerer Entfernung von der Oberfläche bleibt das Feld *ungeändert*. Hieraus ist zu folgern, daß durch Anbringung der Spitze die *Anfangsspannung* herabgesetzt wird (der *Ausbruch* der Entladung kann an der Spitze schon bei kleiner Spannung stattfinden), daß dagegen die *Grenzspannung* der Büschelentladung wenig geändert werden wird (denn das Büschel wächst in ein durch das Vorhandensein der Spitze wenig geändertes Feld).

Für den speziellen Fall, daß bei sonst *symmetrischer Versuchsanordnung* (wie im vorigen Abschnitte) für jeden Elektrodenabstand einmal an der Anodenkugel, dann an der Kathodenkugel eine kurze Spitze (1 cm langer geschärfter Nagel) in Richtung der Kugelzentralen angebracht war, wurden Messungen ganz

wie zu Tab. I und II ausgeführt. Es genügt die für eine bestimmte Ventildfunkstrecke ($F = 15$ cm, $D = 15$ cm) gefundenen Werte anzugeben (die Länge f ist auch hier zwischen den nächsten Punkten der Kugeloberflächen gemessen).

Tabelle IV.

		Schlagweite in Zentimetern mit		
		30 Proz.	50 Proz.	70 Proz.
		aller Funken		
Zwei spitze Elektroden		43,7	42,9	42,0
$d = 3$ cm	Spitze an Anode	45,2	43,5	42,4
	„ „ Kathode	36,7	33,2	29,5
$d = 5$ cm	Spitze an Anode	44,3	42,6	40,5
	„ „ Kathode	31,6	30,7	29,6
$d = 6$ cm	Spitze an Anode	44,6	43,7	42,9
	„ „ Kathode	35,6	34,5	32,6
$d = 10$ cm	Spitze an Anode	43,0	41,4	37,0
	„ „ Kathode	21,1	20,2	19,2

Ähnliches ergaben weitere Messungen in anderen Spannungslagen (mit anderem F).

Es läßt sich folgendes feststellen: *Sitzt die Spitze an der Anode, so ist die Unsicherheit der Funkenlänge eine nur geringe, und die Funkenspannung (Grenzspannung überwiegend positiver Büschelentladung) ist unabhängig von der Elektrodengröße (geprüft bis zu Werten $f:d = 3$ hinab).*

Sitzt die Spitze an der Kathode, so ist die Unsicherheit der Funkenbildung oft beträchtlich (Tab. IV läßt dies zufällig nicht besonders hervortreten); die Funkenspannung ist jetzt wesentlich abhängig von der Elektrodengröße und nimmt mit letzterer beträchtlich zu.

Unter Berücksichtigung dieser Ergebnisse erscheinen die Beobachtungen von Abschnitt II über Bildung langer Funken wesentlich geklärt. Es läßt sich nunmehr folgendes bezüglich des Zusammenhanges von Funkenlänge und Elektrodendurchmesser bei vollständig symmetrischer Versuchsanordnung und für irgendeine bestimmte hohe Spannung aussagen (vgl. Fig. 7).

Würde zufällig bei *allen* Funken einer Beobachtungsreihe der Bildungsprozeß der leuchtenden Entladung von der *Anode* ausgehen, wobei dann jeweils das positive Büschel den überwiegenden Teil des Schlagraumes füllt, so würde man, da die Grenzspannung dieser Büschelentladung (in Fig. 7 Kurvenstück *AB*) fast unabhängig von der Elektrodengröße ist, auch die Funkenspannung gleich unabhängig finden, soweit sie mit dieser Grenzspannung identisch ist (von *A* bis *L*).

Gingen *alle* Entladungen von der *Kathode* aus, so läge die Grenz- und Funkenspannung wesentlich höher. Würde hierbei der Schlagraum überhaupt nur vom negativen Büschel *erfüllt*, so wären (nach dem Verhalten rein negativer Büschelentladung zwischen Kugelkathode und Platte geschlossen) etwa

die Funkenlängen entsprechend Kurve *A'C'* zu erwarten; je kleiner jedoch die Elektroden sind, um so leichter und eher kommt dem vorschießenden negativen Büschel ein positives von der Anode aus entgegen. Für die tatsächlich jeweils meist eintretende Verteilung von positivem und negativem Büschel im Schlagraume ergäbe sich (auch wenn wie angenommen die Entladung stets an der Kathode *ausbricht*) im Mittel *AC* als Kurve gleicher Grenzspannung, jedoch hängt dieselbe und mit ihr die Funkenspannung stark von Zufälligkeiten ab.

Indem bei völlig symmetrischer Versuchsanordnung einmal die Entladung an Anode, dann an Kathode einsetzt, wie es der Zufall mit sich bringt, so liegt der *Mittelwert* der Grenz- bez. Funkenspannung für eine Reihe von Entladungen zwischen

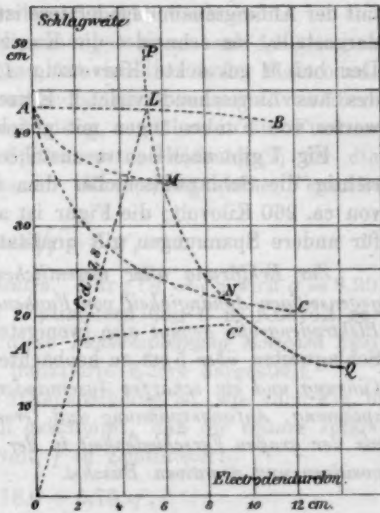


Fig. 7.

den für Ausbruch an Anode und den an Kathode geltenden Werten. Die Kurve gleicher Mittelwerte für Grenz- oder Funkenspannung verläuft also zwischen AB und AC und nähert sich bei hinreichender Häufung der beobachteten Funkenzahl mehr und mehr einer mittleren Kurve AM .

Für kleine Werte $f:d$ ist die Funkenspannung identisch mit der Anfangsspannung; letztere ist durch die Kurve $PLMNQ$ dargestellt, sie schneidet die Kurven gleicher Grenzspannung. Der bei M geknickte Kurvenzug AMQ gibt also den Verlauf des aus hinreichend vielen¹⁾ Einzelwerten gezogenen Mittelwertes von Funkenlängen mit gleicher Funkenspannung.

Fig. 7 gibt nach den voranstehenden Messungen quantitativ richtig die Schlagweiten bei dem speziellen Spannungswerte von ca. 260 Kilovolt; die Figur ist als typisch anzusehen, d. h. für andere Spannungen gilt qualitativ das gleiche Bild.

Zur Erklärung aller wesentlichen Eigentümlichkeiten in der gegenseitigen Abhängigkeit von Funkenspannung, Funkenlänge und Elektrodengröße genügt also (wenigstens für die in der Regel bei Schlagweiten über 5 cm zu beobachtenden Verhältnisse) die Einführung und ein scharfes Auseinanderhalten der Begriffe Funkenspannung, Anfangsspannung und Grenzspannung und die Kenntnis der großen Verschiedenheit in der Wachstumsfähigkeit für den positiven und negativen Büschel.

Anhang.

Gesetz der Funkenspannung an Spitzen.

Bei den verschiedensten Spannungen bis ca. 90 Kilovolt (Schlagweiten bis ca. 15 cm) war früher und oben (vgl. Fig. 4) die einfache Beziehung gefunden, daß für den Schnittpunkt M das Verhältnis der Funkenlänge f zum Elektroden Durchmesser d fast

1) Aus den Messungen geht hervor, daß bis zu $f = \text{ca. } 20 \text{ cm}$ die Mittel aus je 200 Funkenlängen sich nicht mehr allzusehr vom Mittel AM für sehr viel Funken entfernen, daß jedoch für $f > 30 \text{ cm}$ selbst 400 Funken dort noch nicht zur Bildung eines bis auf 10 Proz. sicheren Mittels genügen, wo die Kurven AL und AN weit auseinandergehen. Es folgt also: Zu Meßzwecken eventuell brauchbare, d. h. mit verhältnismäßig geringer Unsicherheit verbundene Funkenbildung findet nur für $f:d > 25$ statt, — und dann wieder für $f:d < 6$ (Funkensp. = Anfangsp.).

konstant ist und zwar nahe 7 beträgt. Aus den weiterreichenden Messungen mit dem Induktor, durch welche die Punkte L und M als besonders zu unterscheidende hervortreten (vgl. Fig. 7), ist zu entnehmen, daß nur für den Punkt L angenäherte Konstanz von $f:d$ gilt (und zwar ist $f:d$ für L nahe gleich 7,8), daß dagegen für den Punkt M das Verhältnis $f:d$ nicht konstant bleibt, sondern mit wachsendem f merklich abnimmt.

Liegt aber L für alle Spannungen genau auf der gleichen Geraden (ist $f:d = \text{konstant}$), so läßt sich die von der Elektrodengröße als unabhängig anzusehende Grenzspannung C von überwiegend positiver Büschelentladung, und somit die Funkenspannung zwischen zwei Spitzen aus Gleichung (2) für die Anfangsspannungen berechnen. Man erhält (ohne Vernachlässigungen)

$$(3) \quad C = a\sqrt{f} + b \cdot f,$$

wo a und b Konstanten bedeuten. Für $f:d = 7,8$ wird $a = 8,90$ und $b = 4,779$, wenn f in Zentimetern und C in Kilovolt gezählt sind. In Fig. 6 ist diese Funkenspannung zwischen zwei Spitzen durch die schwach punktierte Kurve dargestellt.

Diese Kurve für die Funkenspannung ist, wie auch Fig. 6 erkennen läßt, so schwach gekrümmt, daß die lineare Interpolationsformel (V in Kilovolt, f in Zentimetern)

$$V = 18,0 + 5,75 \cdot f,$$

für $f = 10$ cm, bis $f = 50$ cm, nur zu Abweichungen bis zu 1,5 Proz. führt; solche liegen aber noch innerhalb der Versuchsunsicherheiten.

Dieses Ergebnis stimmt mit den Beobachtungen anderer über die Funkenspannung völlig überein; von Hrn. B. Walter¹⁾ ist schon öfters auf die sehr angenäherte Gültigkeit einer linearen Interpolationsformel $a + bf$ im oben angeführten Bereiche hingewiesen.²⁾

1) B. Walter, Elektrotechn. Zeitschr. p. 874. 1904.

2) Mehrere Umstände können leicht für ein größeres Schlagweitenintervall den Verlauf der Funkenspannung als streng geradlinig erscheinen lassen, wie dies der Formeltypus von Hrn. Walter ausdrückt:

Bei kleinen Schlagweiten übersteigen die Funkenspannungen die Grenzspannung der Büschelentladung aus zwei Gründen: einmal werden

Zur Orientierung seien nachstehend die zurzeit vorliegenden Bestimmungen der Funkenspannungen zwischen zwei Spitzen bei großer Schlagweite zusammengestellt.

Der bisher zur Bestimmung der Funkenspannung eingeschlagene Weg war von dem von mir betretenen *völlig verschieden*.

stumpfe Spitzen hier schon wie kleine Kugelelektroden wirken, andererseits tritt hier oft schon, wenn auch nur momentan vorübergehend, Glimentladung mit ihrer bei kleinen Schlagweiten relativ *hohen* Grenzspannung auf.

Auch bei sehr *großen* Schlagweiten, an der Grenze der Leistungsfähigkeit des jeweils benutzten Induktors, kann man leicht *scheinbar* zu große Spannungswerte erhalten, wenn man die Sekundärspannung aus Primärspannung und Übersetzungsverhältnis *rechnet*, ohne auf die aus verschiedenen Gründen wachsenden Spannungsverluste genügend Rücksicht zu nehmen; ein typisches Beispiel hierfür scheint mir die Kurve von Hrn. Fr. Klingelfuss, Ann. d. Phys. 5. p. 855. Fig. 7. 1901 zu bieten.

Jedoch nicht nur scheinbar, sondern auch wirklich (wenn auch nicht in dem Maße, wie es die eben genannte Darstellung von Hrn. Klingelfuss zeigt) kann an der Grenze der Leistungsfähigkeit des jeweils benutzten Induktors oder Transformators die zur Bildung längster Funken *tatsächlich* nötige Spannung schließlich *erheblich stärker ansteigen*, als es der Formel (3) entspricht. Jedes Büschel verbraucht (man kann auch sagen, entladet) nämlich, bis es zu irgend einer bestimmten Länge angewachsen ist, eine bestimmte Elektrizitätsmenge aus der Elektrode heraus; diese Menge wächst rasch mit der Büschellänge. Wird an der Grenze der Leistungsfähigkeit des Induktors diese normal nötige Menge während der Büschelbildung nicht mehr voll geliefert, so kann doch noch *übernormale* Spannung diesen Defekt ausgleichen und das Büschel noch weiter verlängern; dies ist aus dem allgemeinen Mechanismus der Büschelbildung ohne weiteres zu schließen. In den Diagrammen muß sich dies dann ähnlich äußern wie früher bei stromschwachen Influenzmaschinen der Einfluß mangelnder Elektrodenkapazität (vgl. Ann. d. Phys. 10. p. 788, Fig. 5. 1903) oder das zu kurze Andauern der Spannung beim Transformator (l. c. Fig. 7). Auch oben in Abschnitt III muß die Fig. 7 dann also an der Grenze der Leistungsfähigkeit des Induktors schließlich in folgender Weise deformiert erscheinen: AL steigt von A nach L zu etwas an, anstatt abzufallen, L selbst und mit ihm A liegt jetzt *wesentlich* zu tief, die Kurve (Gerade) OL ist also jetzt am Ende L nach der Abszisse zu gekrümmt, die Lage von Q aber *nicht* merklich verschoben.

Von diesem Gesichtspunkte aus erscheinen dann die Werte der Tab. II: $F = 20$ cm, $D = 15$ cm, dann $d = 10$ cm, $f = 35,4$ cm und $f = 51,5$ cm zwischen Spitzen und die aus den beiden ersten Wertepaaren nach Gleichung (2) errechnete Spannung von etwa 335 Kilovolt nicht mehr auffallend.

Hr. Klingelfuss¹⁾ — erste Tabellenzeile —, welcher auch mit *Hg-Unterbrecher* arbeitete, bestimmte die maximale Spannung im Primärkreise und multipliziert diese mit dem Übersetzungsverhältnisse (Verhältnisse der Windungszahlen).

Bei Betrieb mit Wechselstrom (Amerikan Institute of Elektr. Engineers²⁾, B. Walter³⁾, W. Voege⁴⁾, W. Weicker⁵⁾) kann man die Funkenspannung durch Bestimmung der effektiven Primärspannung, des Scheitelfaktors, des Übersetzungsverhältnisses und Multiplikation dieser Größen finden. Leider ist bei den Bestimmungen des Americ. Inst. ebensoviel wie bei den Messungen von Walter und Weicker der Scheitelfaktor *nicht* besonders festgestellt worden; setzt man diesen gleich $\sqrt{2}$, so erhält man die Wertefolgen der zweiten, dritten und fünften Zeile nachfolgender Zusammenstellung. Die vierte Zeile gibt die Bestimmungsergebnisse von Hrn. W. Voege, welcher allein alle drei Größen — auch den Scheitelfaktor⁶⁾ — gemessen hat.

In der letzten Zeile sind schließlich noch nach meiner Formel $8,90 \cdot \sqrt{f} + 4,779 f$ berechnete Werte angegeben; sie gelten für Induktor betrieben mit Quecksilberunterbrecher (nur ca. eine Unterbrechung in jeder Sekunde). Wie eingangs dieses Abschnittes angegeben wurde, ist zur Ableitung der Formel zunächst auf Grund bekannter früher bestimmter Anfangsspannungen zwischen Kugel und Platte (Gleichung (1) in Abschnitt 1) auf die Anfangsspannungen zwischen zwei Kugeln bei symmetrischer Versuchsanordnung geschlossen (dies gab Gleichung (2) in Abschnitt 1) und dann aus diesen Anfangsspannungen unter Anwendung der gefundenen Unabhängigkeit der Grenzspannung der positiven Büschelentladung von der Elektrodengröße und eines weiteren eigentümlichen von mir

1) Fr. Klingelfuss, Ann. d. Phys. 5. p. 855. 1901. Diese Messungen gehören genau genommen nicht in die Zusammenstellung, da bei ihnen der spitzen Anode eine Kathodenplatte gegenüberstand.

2) Vgl. W. Voege, Ann. d. Phys. 14. p. 565. 1904.

3) B. Walter, Elektrotechn. Zeitschr. p. 874. 1904.

4) W. Voege, l. c.

5) W. Weicker, Elektrotechn. Zeitschr. p. 248. Fig. 33. 1904.

6) W. Voege, l. c. Der Scheitelfaktor ergab sich als sehr merklich von $\sqrt{2}$ verschieden!

gefundenen Gesetzes (Geradlinigkeit von OL in Fig. 7, Neigung gleich 7,8 nach Abschnitt III) die Formel abgeleitet.

Schlagweite f in cm	10	15	20	25	30	35	40	45
Kilovolt nach:								
Klingelfuss	107,5	—	155,9	—	182,7	—	220,4	—
Americ. Inst.	73,5	97,8	122,0	146,0	170,0	194,8	—	—
B. Walter	65,8	89,1	111,4	133,6	157,0	176,6	196,4	217,2
W. Voegel	73,2	96,5	119,9	140,6	165,7	190,9	—	—
W. Weicker	64	76	98	120	142	—	—	—
M. Toepler	75,9	106,2	135,4	164,0	192,1	219,9	247,5	274,8

Es läßt sich folgendes erkennen: Im Bereiche von 10 bis 40 cm Schlagweite f lassen sich die Wertefolgen (für die Funken-
spannung zwischen zwei Spitzen) von Klingelfuss, Walter¹⁾,
Toepler besser durch den Formeltyp $a\sqrt{f} + b \cdot f$ als durch
die lineare Formel $A + B \cdot f$ darstellen, dagegen die Werte
des American Inst. und diejenigen der Herren Voegel und

1) Bemerkte sei, daß gerade die Beobachtungen von Hrn. B. Walter
(vgl. l. c.) sich im Intervall zwischen $f = 10$ cm und $f = 45$ cm besser
durch die Formel $v = 7,90 \cdot \sqrt{f} + 2,33 \cdot f$ als durch die von Walter
selbst angegebene lineare Formel $v = 16,0 + 3,110 \cdot f$ darstellen lassen.
Man erhält nämlich:

Schlagweite f in cm	5	10	15	20	25	30	35	40	45
Kilovolt beobachtet	31,6	46,6	63,1	78,9	94,6	111,2	125,1	139,1	153,8
Kilovolt berechnet nach Walter	31,6	47,1	62,7	78,2	93,8	109,3	124,9	140,4	156,0
Abweichung in Proz.	0,0	-1,1	+0,6	+0,9	+0,9	+1,7	+0,2	-0,8	-1,4
Kilovolt berechnet nach Toepler . . .	27,97	46,38	63,20	79,24	94,75	109,88	124,73	139,38	153,82
Abweichung in Proz.	+13	+0,47	-0,16	-0,43	-0,16	+1,20	+0,30	-0,20	-0,01

Sieht man von dem aus angegebenen Gründen wohl auszuschließen-
den Werte für $f = 5$ cm ab, so beträgt die Summe der absoluten Werte
der prozentischen Fehler bei Berechnung nach Walter 7,6, bei meiner
Formel nur 2,9. Bestimmt man — unter Weglassung der Beobachtungen
für 5 cm Elektrodenabstand — in bekannter Weise die Kurven mit
kleinster Summe der Fehlerquadrats, so erhält man $17,37 + 3,049 \cdot f$ und
 $7,430\sqrt{f} + 2,330 \cdot f$ mit dem Fehlerquadratsummen 9,10 und 3,95.

Weicker eher durch eine Gerade; alle Wertefolgen aber weichen in diesem Intervall von der Geradlinigkeit kaum mehr ab, als die Bestimmungsunsicherheit beträgt.

Die von mir erhaltenen Spannungswerte erscheinen zunächst im Vergleiche sehr hoch. Zum Teile ist dies sicher dem Umstande zuzuschreiben, daß meine Messungen an einzelnen zeitlich weit getrennten Entladungen (ein Funken in der Sekunde) vorgenommen wurden, den Bestimmungen von Americ. Inst., Walter, Voege, Weicker dagegen Wechselstrom (100 Wechsel in der Sekunde) zugrunde liegt. Zur guten Hälfte ist jedoch der Unterschied nur ein scheinbarer. Die Herren Walter, Voege und Weicker haben die Spannung gemessen, welche nötig ist, um soeben im Entladungsraume einzelne seltene Funken zu erhalten — meine Werte beziehen sich aber auf 50 Proz. Treffer. Nun gehören aber

Zu f mit 50 Proz. Treffern	32,6	43,0	51,5
Werte f „ 5 „ „	34,5	46	56

Die Schlagweite (zwischen Spitzen) mit einzelnen, seltenen Funken ist also jedenfalls als rund 10 Proz. größer als diejenige mit 50 Proz. Treffern anzunehmen.

Die ebenfalls sehr hohen Werte von Klingelfuss gelten für Elektrodenabstände, bei welchen der Funke „regelmäßig übersprang, ohne auszusetzen“; auch diese Spannungswerte würden also wesentlich zu verkleinern sein, um mit den übrigen direkt vergleichbar zu werden.

Dresden, Physik. Inst. d. Techn. Hochsch., 10. Dez. 1905.

(Eingegangen 12. Dezember 1905.)

12. **Bemerkungen**
zur Abhandlung des Hrn. H. Reissner:
„Anwendungen der Statik und Dynamik mono-
zyklischer Systeme auf die Elastizitätstheorie“;
von P. Ehrenfest.

Hr. Reissner führt im ersten Teil dieser Abhandlung¹⁾ folgenden Gedanken durch: Man kann Monozykel mit *einer* zyklischen Koordinate p und *einer* nichtzyklischen Koordinate p angeben, die folgende Eigenschaft besitzen: Man lasse auf die beiden Koordinaten immer nur solche Kräfte angreifen, daß die Änderung der nichtzyklischen Koordinate außerordentlich langsam erfolgt und daß somit der Ausdruck für die kinetische Energie des Monozykels

$$(1) \quad \mathcal{E} = \frac{A}{2} \dot{p}^2 + B \dot{p} \dot{p} + \frac{C}{2} \dot{p}^2$$

sich merklich auf

$$\mathcal{E} = \frac{A}{2} \dot{p}^2$$

reduziert. Es liefert dann bekanntlich bei passender Wahl des Koeffizienten A als Funktion von p das Monozykel eine Analogie zum Verhalten idealer Gase bei enorm langsamer Änderung des Volumens. p entspricht dem Volumen, die zugehörige Lagrangekraft P dem Druck, die zyklische Bewegung der Wärmebewegung und einer direkten Arbeitsleistung entlang der zyklischen Koordinate entspricht Wärmezufuhr. (Im Speziellen wird also die Bedingung der Adiabasie bei den Änderungen des Gaszustandes abgebildet durch die Forderung, daß auf die zyklische Koordinate keine Kraft angreife.)

Erfolgt die Dilatation oder Kompression des Gases mit beträchtlicher Geschwindigkeit, so stellt sich neben anderen Effekten vor allem innere Reibung des Gases ein. Die Wirkung

1) H. Reissner, Ann. d. Phys. 9. p. 44. 1902.

dieser inneren Reibung wird besonders gut überblickbar, wenn die Volumänderung adiabatisch erfolgt, wenn man also ohne Wärmezufuhr ein Gasquantum z. B. von einem Teil des Gefäßes sich über das ganze Gefäß frei ausbreiten läßt. Es entstehen dann zunächst turbulente Bewegungen, die mindestens durch die innere Reibung des Gases schließlich vernichtet werden.

Der Hr. Verfasser hat nun versucht zu zeigen, daß das Monozykel bei beträchtlicher Änderungsgeschwindigkeit der nichtzyklischen Koordinate p dieses nicht konservative Verhalten der Gase bei raschen adiabatischen Volumänderungen abbilde. In welchem Sinne diese Abbildung gemeint ist, wird die folgende Rechnung klar machen; zugleich aber zeigt sie, soviel ich sehen kann, daß bei direkter Ausrechnung der betreffenden *Schlußgleichung* des Hrn. Reissner *jenes der Reibung analoge Glied gar nicht vorhanden ist, da sein Koeffizient identisch Null ist.*

Hr. Reissner untersucht die Lagrangekraft der nicht-zyklischen Koordinate p im Fall beträchtlicher Geschwindigkeit und Beschleunigung von p und zwar dann, wenn keine Kraft auf die zyklische Koordinate φ angreift (Adiabasie). Der Autor gelangt so zu seiner Gleichung (4 f) die folgenden Bau besitzt:

$$(2) \quad P = D(p) - \dot{p} E(p) + \dot{p}^2 F(p) - \ddot{p} G(p).$$

D, E, F, G sind vollständig angeschriebene Funktionen von p .

Und nun bezeichnet Hr. Reissner *das in \dot{p} lineare Glied $-\dot{p} E(p)$ als „Reibungs“-Glied.* Da der Hr. Verfasser nicht alle Zwischenrechnungen angibt, ist nicht genau ersichtlich, wieso er zu diesem Glied gelangt. Die direkte Ausrechnung der Kraft P liefert jedenfalls kein derartiges Glied, wie man sofort zeigen kann.

Es ist

$$(3) \quad P = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}} \right)$$

(vgl. Gleichung (2) l. c.).

Ferner, da die Kraft auf die zyklische Koordinate $\mathfrak{P} = 0$ angenommen wird:

$$(4) \quad 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right)$$

(vgl. Gleichungen (2), (4) und p. 57 l. c.).

Gleichung (3) liefert bei Ausführung der Differentiationen (die Koeffizienten in (1) sind nur Funktionen von p):

$$P = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial p} \dot{p}^2 + \frac{\partial B}{\partial p} \dot{p} \ddot{p} - \frac{\partial B}{\partial p} \dot{p} \ddot{p} - \frac{\partial C}{\partial p} \dot{p}^2 - B \ddot{p} - C \ddot{p},$$

also

$$(5) \quad P = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p}^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial p} \dot{p}^2 - B \ddot{p} - C \ddot{p}$$

(Gleichung (4c) l. c.).

Zur Elimination von \dot{p} und \ddot{p} verwenden wir die Gleichung (4)

$$\frac{d}{dt} (A \dot{p} + B \ddot{p}) = 0,$$

oder

$$A \dot{p} + B \ddot{p} = \text{konst.} = M,$$

also

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{p} = \frac{M}{A} - \frac{B}{A} \ddot{p}, \\ \text{somit} \\ \ddot{p} = -\frac{M}{A^2} \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p} + \frac{B}{A^2} \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p}^2 - \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial p} \dot{p}^2 - \frac{B}{A} \ddot{p}. \end{cases}$$

Substituiert man diese Werte von \dot{p} und \ddot{p} in die Gleichung (5), so erhält man:

$$(7) \quad \begin{cases} P = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial p} \frac{M^2}{A^2} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{MB}{A^2} \dot{p} + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial p} \frac{B^2}{A^2} \dot{p}^2 \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial p} \dot{p}^2 + \frac{\partial A}{\partial p} \frac{BM}{A^2} \dot{p} - \frac{B^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p}^2 + \frac{B}{A} \frac{\partial B}{\partial p} \dot{p}^2 \\ - C \ddot{p}. \end{cases}$$

Man sieht, daß die beiden in \dot{p} linearen Glieder einander tilgen; man erhält:

$$(8) \quad \begin{cases} P = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial p} \frac{M^2}{A^2} - 0 \cdot \dot{p} + \dot{p}^2 \left\{ \frac{B}{A} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial p} \frac{B^2}{A^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial p} \right\} \\ - \ddot{p} \left(C^2 - \frac{B^2}{A^2} \right). \end{cases}$$

Dieser Ausdruck stimmt wohl mit dem von Hrn. Reissner angegebenen im allgemeinen Bau überein (vgl. Gleichung (2)). *Das von ihm als Reibungsglied angesprochene Glied fehlt aber.* (Auch bei verschiedenen Versuchen, die von Hrn. Reissner nicht angegebenen Zwischenrechnungen zu ergänzen, stieß

ich immer wieder auf Gleichungen, in denen das „Reibungs“-Glied fehlt.)

Ich habe mich, dem Hrn. Verfasser folgend, auf den Fall der Adiabasie und einer einzigen nichtzyklischen Koordinate beschränkt. Betrachtet man rasche adiabatische Änderungen von Monozykeln mit mehreren nichtzyklischen Koordinaten, so treten hier tatsächlich in dem Ausdruck für die Lagrangekraft, z. B. des h^{ten} p , P_h Glieder auf, die linear sind in den \dot{p} , die sogenannte gyrostatistische Reaktion. Aber auch sie zeigen nicht den Charakter der Reibungskräfte. Denn in P_h treten alle \dot{p} mit Ausnahme des \dot{p}_h (der Geschwindigkeit mit gleichem Index) auf: die gyrostatistische Reaktion steht (nach der Hertz'schen Terminologie) normal zur Bahn. So wie auch die Kraft, die ein Elektron bei seiner Bewegung durch ein Magnetfeld erfährt, zwar linear in den Geschwindigkeitskomponenten des Elektrons ist, aber normal zur Bahn des Elektrons steht. Solche Kräfte bewirken keinen Energieumsatz.

Die adiabatischen Änderungen der nichtzyklischen Koordinaten eines Monozykels liefern also keinerlei Analogie zu den Erscheinungen der inneren Reibung bei idealen Gasen.

Zwei Stellen im letzten Kapitel der Thermodynamik von Poincaré („Zurückführung der Prinzipien der Thermodynamik auf die allgemeinen Prinzipien der Mechanik“) erwecken den Anschein, als ob Helmholtz dennoch eine derartige Analogie behauptet hätte. §§ 319, 326 und 327 „Irreversible Erscheinungen“ behauptet Poincaré, daß im Fall „unvollständiger“ Systeme erster Art (Elimination einiger nichtzyklischer Koordinaten vermöge der Bedingung, daß auf sie dauernd keine Kraft wirkt) die kinetische Energie eine beliebige Funktion der Geschwindigkeiten, also z. B. eine Funktion dritten Grades in ihnen werden könne, wenn sie vor der Elimination quadratisch war. Die betreffende Stelle bei Helmholtz besagt ausdrücklich, daß in diesem Fall die Lagrangefunktion noch immer eine gerade Funktion in den Geschwindigkeiten bleibt, woraus folgt, „daß auch in diesem Falle die Gesamtbewegung rückläufig vor sich gehen kann.“¹⁾ Poincaré hingegen schreibt:

1) H. v. Helmholtz, „Die physikalische Bedeutung der kleinsten Wirkung“, Ges. Abh. 3. p. 217.

„Die irreversiblen Vorgänge könnten also mit den unvollständigen Systemen gleichbedeutend sein; diese Annahme macht Helmholtz. Indessen nimmt derselbe noch eine andere übrigens analoge Erklärung zu Hilfe.“ Und nun folgt die Entwicklung der gyrostatischen Reaktion. Helmholtz nennt sie „Fälle mit verborgener Bewegung“ und sagt darüber (l. c. p. 215): „Diese Fälle unterscheiden sich von denen, wo H die Geschwindigkeiten nur in Gliedern zweiten Grades enthält, wesentlich dadurch, daß die Bewegung nicht unter gleichen Bedingungen rückläufig vor sich gehen kann, wenn nicht die verborgenen Bewegungen gleichzeitig umgekehrt werden.“ Helmholtz behauptet aber nicht, daß hierin eine Analogie oder gar Erklärung der irreversiblen Prozesse der Thermodynamik liege und nur die mehrfache Bedeutung, in der man gegenwärtig den Ausdruck „unumkehrbarer Prozeß“ gebraucht, kann zu dieser Mißdeutung Anlaß geben.

Poincaré hat aber gerade diese beiden angeblichen Erklärungsversuche der Irreversibilität thermischer Prozesse zum Ausgangspunkt einer eigentümlichen Kritik *aller* mechanischen Erklärungsversuche des Entropiesatzes genommen.

Wien, 3. Dezember 1905.

(Eingegangen 6. Dezember 1905.)

13. Bemerkungen
zu der Nottiz des Hrn. B. Walter: Über das
Nachleuchten der Luft bei Blitzschlägen;
von K. E. F. Schmidt.

Hr. B. Walter hat im 14. Heft des Jahrganges 1905 der Annalen einige Bemerkungen über das Nachleuchten der Luft bei Blitzschlägen veröffentlicht, in denen er eine von mir geäußerte Auffassung¹⁾ zu widerlegen sucht; hierauf erwidere ich folgendes. Ich habe die von Walter aus seinen Versuchen gezogene Schlußfolge, daß viele Blitze nicht einen einfachen Entladungsvorgang, sondern eine Reihe mit zeitlichen Unterbrechungen folgender Teilentladungen bilden, gar nicht angefochten. Ich habe vielmehr seine Ansicht mit meinen Beobachtungen in Einklang gefunden und das auch entsprechend hervorgehoben. Nicht auf diese Teilentladungen, sondern auf die in Fig. 2 und 3 der Taf. II Bd. 10 dieser Annalen und auch in Fig. 2 der Taf. VII des Bd. 18 auftretenden horizontal verlaufenden Lichtbänder bezog sich meine Bemerkung, daß sie durch ein phosphoreszenzartiges Nachleuchten entstehen. Gegen diese Anschauung führt Hr. Walter verschiedene Gründe an, die meines Erachtens nicht stichhaltig sind; als „wichtigsten und lehrreichsten“ den, daß das Nachleuchten gar nicht im unmittelbaren Anschluß an die Hauptentladung, sondern nach einer meßbaren Pause eintritt. Für die Teilentladungen würde das zutreffen, auf diese bezieht sich meine Bemerkung aber nicht, für die in Frage stehenden Lichtbänder trifft es aber nicht zu, denn diese schließen sich, wie aus den Figuren ohne weiteres hervorgeht, direkt an die Hauptentladung an und laufen, mit der Zeit schwächer werdend, schließlich in eine feine Spitze aus. Beobachtet werden sie nur an solchen Stellen der Blitzbahn, wo diese eine Krümmung derart erfährt, daß eine größere Strecke der Bahn in der Sehlinie des Beobachters liegt. Die

1) K. E. F. Schmidt, Leuchtdauer der Blitze. Elektrotechn. Zeitschr. p. 908. 1905.

hiermit verbundene Vermehrung der leuchtenden Teilchen gibt eine erhöhte Lichtwirkung, und an solchen Stellen kann auch eine an und für sich schwache Phosphoreszenzwirkung auf der Platte zum Ausdruck kommen. An Stellen, wo die Blitzbahn vertikal verläuft, wird die Erscheinung ihrer Schwäche wegen nicht bemerkt.

Ebenso wird sie fehlen, wenn wir im Laboratoriumversuch schwache Entladungsfunken photographisch untersuchen; wenn daher die Funkenbilder des Hrn. Feddersen scharf erscheinen, so darf dies nicht als ein Grund gegen die Annahme der Phosphoreszenz angesehen werden, wie es Hr. Walter tut. Bei seinen Aufnahmen der kräftigen Funkenentladungen eines modernen Induktors treten ja in der Tat auch bei den Krümmungen der Funkenbahn die ersten Ansätze der horizontalen Lichtbänder auf.

Der in meiner Notiz über die Leuchtdauer der Blitze erhobene Einwand richtet sich gegen den Schluß, welchen Hr. Benischke¹⁾ an das Vorhandensein der horizontalen Lichtbänder geknüpft hat. Er schreibt sie einem oszillatorischen Vorgange in der Blitzentladung zu; auch Hr. Walter²⁾ gibt in seiner ersten Arbeit die Möglichkeit einer solchen Auffassung zu. Meines Erachtens ist die Erscheinung auf Grund des bisher bekannten Beobachtungsmaterials auf eine Wirkung der Phosphoreszenz der Luftteilchen zurückzuführen.

Halle a. S., 22. Dez. 1905.

1) G. Benischke, Elektrotechn. Zeitschr. p. 812. 1903.

2) B. Walter, Ann. d. Phys. 10. p. 399. 1903.

(Eingegangen 25. Dezember 1905.)

